## APPENDIX.

*Meteorological Journal kept at the Apartments of the Royal Society, by Order of the President and Council.*

---

### ERRATA IN THE MEMOIR ON IMAGINARY QUANTITIES.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Page 26, | line 23, | *for* 3e. *read* | 2de. |
| —— 32, | — 14, | *for* $(1 \pm \sqrt{1})$, *read* | $(1 \pm \sqrt{-1}$. |
| —— 40, | — 19, | *for* $\sqrt{2 \times \sqrt{2}}$, *read* | $\sqrt{2} \times \sqrt{2}$. |
| —— 69, | — 15, | *for* $+ \frac{(0 \times n \cdot 90^{\circ} \sqrt{-1})}{1 \cdot 2}$, *read* | $+ \frac{(0 \times n \cdot 90^{\circ} \sqrt{-1})^2}{1 \cdot 2}$. |
| —— 70, | — 19, | *for* cercle et, *read* | centre à. |
| —— 76, | — 18, | *for* $\{ (\sin. a\sqrt{-1} \cos. a)^{\frac{1}{3}}$, *read* | $\{ (\sin. a\sqrt{-1} + \cos. a)^{\frac{1}{3}}$. |
| —— 82, | — 6, | *for* $\pm px$, *read* | $\pm \sqrt{px}$. |

# III. *Mémoire sur les Quantités imaginaires. Par M.* Buée. *Communicated by* William Morgan, *Esq. F. R. S.*

Read June 20, 1805.

## *Des Signes + et —.*

1. Ces signes ont des significations opposées.

Considérés comme signes *d'opérations arithmétiques*, + et — sont les signes, l'un de l'*addition*, l'autre de la *soustraction*.

Considérés comme signes d'*opérations géométriques*, ils indiquent des *directions opposées*. Si l'un, par exemple, signifie qu'une ligne doit être tirée de gauche à droite, l'autre signifie qu'elle doit être tirée de droite à gauche.

2. Remarque. Lorsqu'on décrit une ligne d'une longueur déterminée, dans une direction déterminée, on fait deux choses: 1°. on donne à cette ligne sa *longueur*; 2°. on lui donne sa *direction*. La première de ces opérations est purement *arithmétique*. La seconde est purement *géométrique*. Dans la première on fait abstraction de la direction. Dans la seconde on fait abstraction de la longueur. Lors donc qu'on réunit ces deux opérations, on fait réellement une opération *arithmético-géométrique*. Ainsi, lorsque je parlerai d'*opérations géométriques*, je n'aurai en vue que les *directions* des lignes, abstraction faite de leurs longueurs. Revenons aux signes + et —.

3. En général lorsque + et — ne signifient pas simple-

ment, l'un l'addition, et l'autre la soustraction, pour savoir ce que — signifie devant une lettre, il faut savoir ce que signifieroit + devant cette même lettre, et prendre pour — la signification opposée.

Si, par exemple, $+t$ signifie un *temps passé*, $-t$ signifie un *temps futur* égal. Si $+p$ désigne une *propriété*, $-p$ désigne une *dette* de même valeur, &c.

4. Il est important de remarquer ici que, lorsqu'une chose désignée par $+l$, une ligne, par exemple, change de situation dans le courant d'une opération arithmético-géométrique, et qu'en conséquence cette ligne a successivement plusieurs situations (qui toutes sont désignées par $+l$) il ne suffit pas, pour connoître la situation désignée par $-l$, de connoître une de celles qu'on désigne par $+l$; il faut encore savoir à laquelle chaque $-l$ est opposée.

5. Ce détail nous mène à la conséquence suivante.

Chacun des signes + et — a deux significations tout-à-fait différentes.

1°. Mis devant une quantité $q$, ils peuvent désigner, comme je l'ai dit, deux *opérations arithmétiques* opposées dont cette quantité est le sujet.

2°. Devant cette même quantité, ils peuvent désigner deux *qualités* opposées ayant pour sujet les *unités* dont cette quantité est composée.

6. Dans l'algèbre ordinaire, c'est-à-dire, dans l'algèbre considérée comme *arithmétique universelle*, où l'on fait abstraction de toute espèce de qualité, les signes + et — ne peuvent avoir que la première de ces significations.

Par conséquent, dans cette algèbre où tout est abstrait, une quantité isolée peut bien porter le signe + qui, dans ce cas,

n'ajoute rien à l'idée de cette quantité ; mais elle ne peut pas porter le signe — (c'est un des principes fondamentaux de Mr. CARNOT, dans son excellent traité intitulé : *Géométrie de Position.)* En effet cette quantité etant supposée isolée, si on l'ajoute, ce ne peut être qu'à zéro ; si on la soustrait, ce ne peut être que de zéro. Le premier est possible ; mais le second est absurde. C'est aussi ce que Mr. FREND a bien vu, dans ses élémens d'algèbre.

Par conséquent, toutes les fois qu'on a pour résultat d'une opération une quantité précédée du signe —, il faut, pour que ce résultat ait un sens, y considérer quelque qualité. Alors l'algèbre ne doit plus être regardée simplement comme une *arithmétique universelle*, mais comme une *langue mathématique.*

7. Première remarque. Lorsqu'on a dit* que les signes + et — indiquoient deux sens opposés, on avoit en vue la seconde des significations que j'ai données à ces signes (No. 5) ; car être susceptible d'un sens est une qualité.

De même, lorsqu'on a dit† qu'une quantité négative étoit plus petite que zéro, on avoit encore en vue cette seconde signification ; car ce n'est pas la *quantité* qui est plus petite que *zéro ;* c'est la *qualité* qui est inférieure à la *nullité.* Par exemple, si mes dettes excèdent mes propriétés, je suis plus pauvre que si je n'avois ni propriétés ni dettes.

8. Seconde remarque. Les deux significations de + et — ne peuvent pas avoir lieu en même temps, relativement au même + ou au même — ; car ce seroit faire signifier en même temps, au même signe, une *abstraction* et une *non-abstraction* de toute *qualité.* Mais 1°. ces deux significations

* *Voyéz les Opuscules mathématiques de* D'ALEMBERT, Tome VIII. p. 270.

† EULER, *Introductio in Analysin Infinitorum,* T. II. p. 4, No. 3.

peuvent avoir lieu *en même* temps pour deux + ou deux — différens. 2°. Elles peuvent aussi avoir lieu pour le même + ou le même —, *en deux différens temps.*

Le premier cas arrive dans ce qu'on appelle *la multiplication des signes.* Le second arrive dans la solution d'un probléme. On sait en effet que, pour résoudre algébriquement un probléme, il faut d'abord traduire la question en langage algébrique; ensuite traduire les formules du langage algébrique en d'autres formules du même langage; enfin traduire celles-ci dans les opérations qu'elles signifient. Lorsqu'on traduit une question (dont l'objet n'est pas quelque nombre abstrait) en langue algébrique, c'est la seconde signification (No. 5) qu'on doit attribuer aux signes + ou —. Dans la seconde traduction, c'est la première signification. Dans la 3e. c'est la première ou la 2de. ou toutes les deux à la fois (No. 2).

Il arrive dans toutes les solutions de problémes par l'algèbre ce qui arrive dans les plus simples règles de trois. Lorsqu'on traduit la condition de la question en une proportion géométrique, on pose les termes de cette proportion comme des nombres *concrets*, c'est-à-dire, comme des nombres d'unités auxquelles des qualités sont attachées. Lorsqu'on opère une multiplication et une division sur les termes de cette proportion (c'est-à-dire, lorsqu'on fait la 3e. des traductions dont j'ai parlé) on regarde ces termes comme des nombres *abstraits.* Lorsqu'enfin on traduit en langue vulgaire le résultat de ces opérations, on regarde ce resultat comme un nombre *concret.*

9. Troisième remarque. Selon la seconde signification donnée (No. 5) aux signes + et —, ils désignent deux *qualités* opposées ayant pour sujets les *unités* dont une quantité

est composée. Or comme une qualité ne peut être séparée de son sujet, les signes + et — ne peuvent être séparés de leurs unités. Dans la langue algébrique, ces unités sont des *substantifs*, et les signes + et —, des *adjectifs*. Par conséquent $+q$ et $-q$ tiennent toujours lieu de $+1 . q$ et $-1 . q$, c'est-à-dire, de l'unité $+1$ ou $-1$ (ayant une qualité quelconque) prise $q$ fois. Cette expression ($q$ fois) marque que $q$ est pris pour un nombre abstrait. De même, si $l$ et $l'$ désignent des lignes, $+l \times l'$ et $-l \times l'$ tiennent lieu de $+1^2 . l \times l'$ et $-1^2 . l \times l'$, $1^2$ etant une surface carrée et $l \times l'$ un nombre abstrait. Si $l$ ou $l'$ désignoit une surface, alors $+l \times l'$ et $-l \times l'$ (qui auroient chacun trois dimensions, savoir, les deux dimensions de la surface et la dimension de la ligne) tiendroient lieu de $+1^3 \times ll'$ et $-1^3 \times ll'$.

Il en seroit de même de toute autre signification de $l$ et de $l'$. On voit par là toute l'étendue de la signification des adjectifs + et — unis à leur substantif 1.

## *Du Signe* $\sqrt{-1}$.

10. Je mets en titre, *Du signe* $\sqrt{-1}$, et non, *De la quantité ou De l'unité imaginaire* $\sqrt{-1}$ ; parceque $\sqrt{-1}$ est un signe particulier joint à l'unité réelle 1, et non une quantité particulière. C'est un nouvel adjectif joint au substantif ordinaire 1, et non un nouveau substantif.

Mais que veut dire ce signe? Il n'indique ni une addition, ni une soustraction, ni une suppression, ni une opposition par rapport aux signes + et —. Une quantité accompagnée de $\sqrt{-1}$ n'est ni additive, ni soustractive, ni égale à zéro. La

qualité marquée par $\sqrt{-1}$ n'est opposée ni à celle qu'indique $+$, ni à celle qui est désignée par $-$. Qu'est-elle donc?

Pour le découvrir, supposons trois lignes égales AB, AC, AD, (Plate II. Fig. 1.) qui partent toutes du point A. Si je désigne la ligne AB par $+1$, la ligne AC sera $-1$, et la ligne AD, qui est une moyenne proportionelle entre AB et AC, sera nécessairement $\sqrt{-1^2}$, ou plus simplement, $\sqrt{-1}$. Ainsi $\sqrt{-1}$ est le signe de la PERPENDICULARITE', dont la propriété caractéristique est, *que tous les points de la perpendiculaire sont ègalement èloignès de points placès à egales distances, de part et d'autre de son piè.* Le signe $\sqrt{-1}$ exprime tout cela, et il est le seul qui l'exprime.

*Ce signe mis devant* a (*a* signifiant une ligne ou une surface) *veut donc dire: qu'il faut donner à* a *une situation perpendiculaire à celle qu'on lui donneroit, si l'on avoit simplement* $+$ a *ou* $-$ a.

11. Voici une autre manière de parvenir au même résultat.

Soient AB, AD (Fig. 2.) deux côtés contigus du carré ABCD. Supposons AB $= \pm 1$, et par conséquent AD $= \pm 1$, et mettons en A le point de départ de la description des lignes AB et AD, ensorte que AB et AD portent le même signe $+$ ou $-$, et que le carré ABCD soit positif.

Maintenant faisons faire à ce carré ABCD un quart de révolution autour du point A pris comme centre. Après ce mouvement, le point B sera en B′, le point C en C′, et le point D en D′. Chacune des lignes AB, BC, CD, DA, prendra une situation perpendiculaire à celle qu'elle avoit, et, au lieu du carré ABCD, on aura le carré AB′C′D′. Or A étant le point de départ, il est clair que, si le carré ABCD est positif, le carré AB′C′D′ doit être négatif, et *vice versâ.* Par

conséquent si ABCD $= + 1^2$ dont le côté AB ou BC ou CD ou DA est $= \pm 1$, on a AB'C'D' $= - 1^2$ dont le côté AB' perpendiculaire à AB, ou B'C' perpendiculaire à BC, ou C'D' perpendiculaire à CD, ou D'A perpendiculaire à DA est $= \pm \sqrt{-1}$. On voit donc que, si l'on donne à tous les côtés d'un carré des positions perpendiculaires à celles qu'ils ont, *sans cependant changer leurs positions respectives et en faisant le plus petit mouvement possible* (c'est-à-dire, en n'ajoutant pas le mouvement de translation à celui de rotation) on obtient le même résultat qu'en joignant le signe $\sqrt{-1}$ au signe de ces côtés.

12. $\sqrt{-1}$ n'est donc pas le signe d'une opération *arithmétique*, ni d'une opération *arithmético-géométrique* (No. 2), mais d'une opération purement géométrique. C'est un signe de perpendicularité. C'est un signe purement descriptif. J'appelle signe *purement descriptif* un signe qui indique la *direction* d'une ligne, abstraction faite de sa *longueur.* Ainsi les mots *purement descriptif* ont la même signification que les mots *purement géométrique* (No. 2).

13. Il faut distinguer la perpendicularité indiquée par ce signe de celles qu'indiquent les signes *sin.* et *cos.* Ces derniers signes ne peuvent pas indiquer la perpendicularité l'un sans l'autre, et même si l'un et l'autre ne sont pas attachés à la même quantité. Ainsi *sin. a* et *cos. a* indiquent bien la perpendicularité de l'un à l'autre; mais *sin. a* et *cos. b* ne l'indiquent pas. $a\sqrt{-1}$, au contraire, indique relativement à $a$ une situation perpendiculaire à celles de $+a$ et de $-a$.

Sin. et cos. sont des signes artificiels. $\sqrt{-1}$ est un signe

naturel, puisqu'il est une conséquence nécessaire des signes + et — considérés comme signes de direction.

14. La *perpendicularité* indiquée par le signe $\sqrt{-1}$ est une *qualité.* Par conséquent une quantité accompagnée de ce signe n'est pas une quantité abstraite, parceque ses unités ne sont pas des unités abstraites,

15. Non seulemeut l'unité affectée du signe $\sqrt{-1}$ n'est pas une unité abstraite, mais elle peut être regardée comme une nouvelle indéterminée introduite par ce signe. En effet, ce signe indique la perpendicularité, mais il n'indique que cela. Il n'indique pas le point de départ de la perpendiculaire. Si donc ce point de départ n'est pas déterminé d'ailleurs, ce signe le laisse indéterminé. Ainsi tandis que la *longueur* de la ligne perpendiculaire est *constante*, sa *manière d'être perpendiculaire* est *variable.* De plus, soit AD (Fig. 1.) l'unité à laquelle le signe $\sqrt{-1}$ est attaché. Elle peut être aussi bien AD′, AD″, ou tout autre rayon du cercle DD′D″; puisque ce cercle etant supposé perpendiculaire au plan de ce papier, tous ses rayons sont perpendiculaires à la ligne CB qui est sur le plan de ce papier.

16. Quoique la *perpendicularité* soit *proprement* la seule qualité indiquée par le signe $\sqrt{-1}$, on peut lui faire signifier, *au figuré*, une qualité toute différente, pourvû qu'on puisse raisonner sur cette qualité, comme on raisonneroit sur la perpendicularité même. Par exemple, si $+s$ représente une somme *possédée*, et $-s$ la même somme *due*, je dis que $s\sqrt{-1}$ peut représenter la même somme *ni possédée ni due*, parcequ'on peut raisonner sur cette dernière somme relativement

aux deux autres, comme sur la ligne AD (Fig. 1.) relativement aux lignes AB, AC.

En effet, de même qu'un point quelconque de la ligne AD est également distant des points de la ligne CD qui se trouvent au même éloignement du point A, de même une partie quelconque de la somme qui n'est *ni possedée ni due* est dans une égale situation relativement aux parties égales de la somme *possédée* et de la somme *due*. La *possession active* étant donc exprimée par $+$, et la *dette ou possession passive*, par $-$, la *négation*, non pas de la somme, mais de sa *possession soit active soit passive*, peut toujours être exprimée par $\sqrt{-1}$.

17. On peut, d'après cette idée, résoudre facilement la question suivante.

*Problême* I.

Un homme possède un nombre $n$ de livres. Il y a de plus un nombre $n'$ de livres qui est par rapport à lui, ou une *propriété*, ou une *dette*, ou une *somme ni possedée ni due*. Si l'on ajoute ensemble les deux nombres $n$ et $n'$, on aura une somme $x$. Si l'on soustrait $n'$ de $n$, on aura un différence $y$. Cette somme et cette différence sont telles que $x+y=a$, et $xy=b$ ($b$ étant une somme *possedée* ou *due* ou *ni l'un ni l'autre*, et $a$ une *propriété*). On demande 1°. les valeurs des nombres $n$ et $n'$; 2°. si $n'$ est *une propriété ou une dette ou une somme ni possédée ni due?*

D'après l'énoncé de cette question, nous avons les quatre équations suivantes: $x+y=a$; $xy=b$; $n+n'=x$; $n-n'=y$. Ces quatre équations donnent: - - - - - -

$$x=\frac{a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2};\ y=\frac{a\mp\sqrt{a^2-4b}}{2}\quad n=\frac{a}{2};\ \text{et } n'=\frac{\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}.$$

Si $4b > a^2$, $b$ étant positif, $n'$ est une somme *ni possédée ni due.*

Si $4b < a^2$, ou si $b$ est négatif, $n'$ est une somme *ou possédée ou due.* Dans ce cas elle augmente ou diminue la somme désignée par $n$.

Si $b$ porte le signe $\sqrt{-1}$, alors $n'$ est en partie *possedée ou due* et en partie *ni possedée ni due.*

18. Il se présente ici une objection qui d'abord paroît insurmontable. Pour exposer cette objection de la manière la plus simple, substituons des chiffres aux lettres $a$ et $b$. Faisons $a = 2$ et $b = 2$. Nous aurons $x = 1 \pm \sqrt{-1}$ ; $y = 1 \mp \sqrt{-1}$ ; $n = 1$ ; et $n' = \sqrt{-1} =$ la valeur 1 qui n'est ni possedée ni due ; $x + y = \overline{1 \pm \sqrt{-1}} + \overline{1 \mp \sqrt{-1}} = 2$ ; $xy = (1 \pm \sqrt{1})\ (1 \mp \sqrt{-1}) = 1^2 - (\sqrt{-1})^2 = 1^2 - (-1) = 2$. Ce resultat répond à la question ; mais on peut croire qu'il n'y répond que d'après une supposition absurde, savoir, que $\sqrt{-1}$, qui n'est ni une propriété ni une dette, étant multiplié par $-\sqrt{-1}$, qui n'est pareillement ni une propriété ni une dette, donne $+1$ qui est une propriété. Comment suffit-il, pour me faire acquérir une propriété, de multiplier une somme qui m'est étrangère par une somme qui m'est également étrangère ?

Cette objection est semblable à celle-ci : comment la dette $-1$ multipliée par la dette $-1$ peut-elle produire la propriété $+1$ ? Ce qui fait la force de cette objection tient à ce que, en la proposant, on n'analyse pas exactement ce qui se passe dans l'opération appellée *multiplication.* En effet, si l'on attache aux mots leur signification ordinaire, cette expression, *multiplier une dette par une dette,* ne présente aucun sens

intelligible ; car, multiplier, par exemple, 3 par 4, signifie en général, prendre 3, 4 *fois ;* de sorte que *multiplier la dette* 3 *par la dette* 4 ne pourroit signifier que, prendre la dette 3 *une dette* 4 *de fois*, ce qui est un galimathias. Cette expression $-1 \times -1$ ne doit donc pas être traduite par celle-ci : *la dette* $-1$ *multipliée par la dette* $-1$. Voyons comment elle doit être traduite.

Le multiplicateur $-1$ présente deux idées, savoir, l'idée de l'unité 1 et l'idée exprimée par le signe $-$. Ce dernier signe représente une opération, de sorte que le double signe $\times -$ en représente deux. Cela posé, il est facile de concevoir que $-3 \times -4$ signifie : $-3$ *pris* 4 *fois avec un signe contraire* à celui que donneroit $-3 \times +4$ ou $-3 \cdot 4$ (No. 3.) Les mots : *pris* 4 *fois*, sont la traduction de $\times 4$, et les mots : *avec un signe contraire*, &c. sont celle de $-$. Maintenant si l'on applique ce qui vient d'être dit au quadruple signe $\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1}$, on verra que les mots suivans de l'objection : $\sqrt{-1}$, *qui n'est ni une propriété ni une dette, étant multiplié par* $-\sqrt{-1}$ *qui n'est pareillement ni une propriété ni une dette*, que ces mots, dis-je, sont une fausse traduction de $\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1}$, et que la vraie traduction de ce signe composé est celle-ci : *La quantité concrète* $\sqrt{-1}$ *prise une fois, dans un sens également éloigné des sens que présenteroient* $\sqrt{-1} \times -(+1)$ et $\sqrt{-1} \times -(-1)$ (Nos. 10 et 16).

Cette explication fait évanouir l'objection. En effet cette objection tombe sur la manière dont la solution du problême remplit la condition exprimée par $xy = b$. $xy$ signifie $x$ *multiplié par* $y$. Cette expression : *multiplié par* $y$, doit être prise dans un sens intelligible. Or l'explication que je viens de

donner du signe complexe $\sqrt{-1} \times - \sqrt{-1}$ est (si je ne me trompe) parfaitement intelligible ; elle est même la seule qui puisse l'être ; elle n'offre d'ailleurs aucune absurdité, et conduit à la solution complette du problême proposé. Donc &c.

19. La solution de la question précédente me paroit impossible par l'algèbre ordinaire qui n'attribue aucune signification intelligible au signe $\sqrt{-1}$.

20. On voit par le détail dans lequel je viens d'entrer que, de cela seul qu'une question conduit à un résultat qui renferme le signe $\sqrt{-1}$, il ne s'ensuit pas qu'elle soit absurde.

Il ne s'ensuit pas non plus qu'elle ne le soit pas.

Pour aider à reconnoître ce qui en est, dans les différens cas, posons quelques principes.

21. 1°. Dans les questions purement arithmétiques, le signe $\sqrt{-1}$ devant indiquer une opération arithmétique, et ne le pouvant pas, indique une opération absurde.

22. 2°. $\sqrt{-1}$ indique une *qualité moyenne* entre deux qualités opposées dont l'une est exprimée par + et l'autre par —. *Ces qualités doivent être indépendantes de la quantité.* Lors donc que la qualité moyenne n'est pas indépendante de la quantité, elle ne peut être exprimée par $\sqrt{-1}$ ; car $\sqrt{-1}$ ne peut exprimer qu'une qualité indépendante de toute quantité, c'est-à-dire, une qualité qui reste la même, quoique la quantité varie. Si, par exemple, j'exprime un temps *futur* par $+t$, et un temps *passé* par $-t$, $t\sqrt{-1}$ ne peut rien signifier, parceque le *présent* qui est la qualité moyenne entre le *futur* et le *passé*, n'est qu'un instant indivisible et qu'il n'a d'autre expression que o.

23. Si cependant on entend (car le langage ordinaire est

si vague qu'il est peu d'expressions qu'on ne puisse entendre de plusieurs manières) par *present*, un certain espace de temps, comme, *ce jour-ci*, *le mois présent*, *la présente année*, *le siècle present*, alors $t\sqrt{-1}$ peut avoir une signification. Car, par exemple, soit AB (Fig. 3.) le mois passé $-t$, EF le mois prochain $+t$, BC représentera la première moitié $\frac{-t\sqrt{-1}}{2}$ et DE la seconde moitié $\frac{+t\sqrt{-1}}{2}$ du mois présent, de sorte que l'expression du mois présent entier sera $\frac{-t\sqrt{-1}}{2}+\frac{t\sqrt{-1}}{2}=0$, (voyez le No. suivant). Or o (qui, comme on le verra bientôt, a deux significations) est la veritable expression du présent. De plus, comme les lignes BC, DE, sont égales et perpendiculaires aux lignes AB, EF, on voit que les parties des deux moitiés du mois *présent* qui sont également eloignées de son milieu CD, le sont pareillement, l'une de l'extrémité A du mois *passé*, et l'autre de l'extrémité F du mois *prochain.*

24. Il faut cependant observer que, cette espèce de *présent* ayant des limites constantes, si la valeur de $\pm t\sqrt{-1}$ donnoit des limites différentes de celles qui seroient supposées tacitement, alors il y auroit une contradiction entre cette valeur de $\pm\sqrt{-1}$ et cette supposition tacite. Par conséquent la solution donnée par cette valeur seroit absurde.

25. N[a]. On trouvera peut-être une espèce de paralogisme dans l'équation $-\frac{t\sqrt{-1}}{2}+\frac{t\sqrt{-1}}{2}=0$, par laquelle je fais l'éspace d'un mois égal à zéro. Mais on observera 1°. que cette équation ressemble à la phrase d'un homme qui, après s'être égaré se retrouve au point dont il vouloit s'éloigner, et dit: " Je ne suis pas plus avancé, après tant de chemin, que " si je n'en avois fait aucun;" car le *temps* est pour l'esprit ce

que l'*espace* est pour le corps. On observera 2°. que $\frac{-t\sqrt{-1}}{2} + \frac{t\sqrt{-1}}{2}$ n'est qu'un signe, aussi bien que o. Ce ne sont pas les choses que j'égalise, mais les signes qui présentent ces choses sous un point de vue particulier. Je les égalise, parceque, dans l'exemple actuel, je puis raisonner sur la chose que me présente le double signe $+\sqrt{-1}\ -\sqrt{-1}$, comme sur celle que le signe o me présente, et que l'un et l'autre de ces signes me conduisent aux mêmes conséquences. Cette équation n'est pas réelle. Elle n'est qu'artificielle, comme tout l'est dans l'algèbre. Elle veut dire ceci: *un mois dont on fait abstraction est (relativement aux conséquences) égal à un mois qui n'existe pas.* Dans $\left(\frac{-t\sqrt{-1}+t\sqrt{-1}}{2}\right)$, c'est *la qualité de passé ou de futur* qui est zéro; dans o, c'est *la quantité de passé et de futur* qui l'est.

26. Le signe o a deux significations. On peut en effet le considérer sous un point de vue *arithmétique* et sous un point de vue *descriptif.* Sous le premier, o signifie *quantité nulle.* Sous le second, il signifie une description telle que la *distance* entre le premier et le dernier point est nulle. (Voyez la Figure 3).

27. Cet exemple fait voir, si je ne me trompe, que les signes $+\sqrt{-1}$ et $-\sqrt{-1}$ peuvent avoir une signification toutes les fois que les qualités représentées par les signes opposés + et — sont telles qu'une unité peut avoir l'*une* ou l'*autre* ou *ni* l'*une ni* l'autre.

De cette manière les signes + et — peuvent, même comme signes d'addition et de soustraction, admettre au milieu d'eux le signe $\sqrt{-1}$. Alors $+q$ signifie que la quantité $q$ a la

qualité d'être *additive;* $-q$, qu'elle est *soustractive;* $q\sqrt{-1}$, qu'elle n'est *ni additive ni soustractive;* que, par conséquent, $q\sqrt{-1}$ est étranger à l'équation qui contient $+q$ ou $-q$.

Nª. Il faut bien remarquer ici qu'*être étranger* ne signifie pas *être nul*, mais *être regardé comme nul.* Dans l'exemple présent, *être étranger* signifie : *ni* additif *ni* soustractif. *Etre nul* signifie : additif *et* soustractif *en même temps.*

28. 3°. Lorsque $\sqrt{-1}$ signifie une *qualité* de la chose prise pour unité, examinons ce que la présence de ce signe indique, dans le cas où la question demande qu'on fasse abstraction de cette qualité et qu'en conséquence on ne fasse pas usage de son signe. Quand on fait une abstraction, comme par exemple, quand, en considérant la *longueur* d'une ligne, on fait abstraction de sa *largeur*, il faut que tous les raisonnemens qu'on fait sur cette ligne soient indépendans de cette *largeur.* Il faut par conséquent que le signe de cette largeur ne paroisse pas, ou qu'il soit accompagné, non du signe $\pm$, mais des signes séparés $+$ et $-$ dont l'un puisse détruire l'effet de l'autre. Si $\sqrt{-1}$ exprime cette *largeur* et qu'il paroisse dans le résultat de ces raisonnemens, sans pouvoir être détruit autrement que par une nouvelle équation qui contredise les équations établies, il indique quelque contradiction dans ces raisonnemens. Il indique donc alors une absurdité. Lors donc qu'on trouve ce signe dans un résultat, il faut voir si la question éxigeoit qu'on fît abstraction de la qualité indiquée par ce signe. Si elle l'exigeoit, la question étoit impossible. Sinon, elle ne l'étoit pas.

29. Si elle exigeoit qu'on fît cette abstraction, cette abstraction étoit une condition. L'expression de cette condition devoit être une équation. Cette équation nouvelle supposoit

une nouvelle indéterminée pour que le problême ne fût pas plus que déterminé.* Or (No. 14.) l'unité renfermée dans le signe $\sqrt{-1}$ pouvant être regardée comme un nouvelle indéterminée introduite par ce signe, et son indétermination étant relative non à la *quantité*, mais à la *qualité*, la seule manière d'exprimer qu'on faisoit abstraction de cette qualité, étoit d'égaler à zéro tous les termes multipliés, par $\sqrt{-1}$. Si donc le résultat donne la somme de ces termes comme n'étant pas $=0$, il est en contradiction avec les conditions de la question.

30. 4°. Mais *toutes les fois qu'on peut donner au signe* $\sqrt{-1}$ *une signification compatible avec les conditions du problême*, c'est-à-dire, lorsque ces conditions n'admettent ni n'excluent cette signification, l'indétermination qui accompagne l'unité qu'il renferme corrige le défaut que ce probléme peut sembler avoir d'être plus que déterminé.

31. De tout ce qui vient d'être dit je conclus que partout où l'algébre n'est qu'*arithmétique universelle* et où le signe $\sqrt{-1}$ se trouve mêlé avec les signes $+$ ou $-$ sans pouvoir être supprimé, les quantités qui portent ce signe $\sqrt{-1}$ sont des *quantités imaginaires;* mais que, quand l'algèbre devient une *langue* (et elle le devient dans toute équation, puisque toute équation est une proposition) alors les quantitiés qui portent le signe $\sqrt{-1}$ peuvent être ou n'être pas réelles. Elles le sont lorsque ni la *qualité* figurée par le signe $\sqrt{-1}$, ni la *quantité* affectée de ce signe, ne sont en contradiction avec les conditions de la question.

* *Voyez la Géométrie de Position de* Mr. CARNOT (page 55.)

32. Je crois qu'il est à propos d'ajouter ici une remarque analogue à celle du No. 8.

Dans ce No. je dis que les deux significations de $+$ et $-$ ne peuvent pas avoir lieu en même temps, relativement au même $+$ ou au même $-$. J'en dis autant du signe $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$. Mais cette remarque a besoin d'être développée.

Principe général. Lorsqu'on a une équation identique, les signes $+$, $-$ et $\sqrt{-1}$ ne peuvent pas avoir une signification dans un de ses membres et un autre signification dans les termes semblables de l'autre membre.

Par exemple, si l'on fait (Fig. 1.) $AB = 1$ et $AD = \sqrt{-1}$, on aura $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 1^2 + (\sqrt{-1})^2$. Supposons pour un instant $1^2 + (\sqrt{-1})^2 = +1 - 1 = 0$. On aura $\overline{BD}^2 = 0$, ce qui est absurde. C'est que le premier membre $1^2 + (\sqrt{-1})^2$ ou $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2$ représente une *figure* formée de deux carrés égaux tels que les côtés de l'un sont *perpendiculaires* aux côtés correspondans de l'autre (No. 11.); tandis que le second membre $+1 - 1$ ou $0$ signifie la *différence* de deux unités abstraites égales. Ainsi l'équation $\overline{BD}^2 = 0$ peut être traduite par cette proposition : la *figure* $\overline{BD}^2$ est égale à la *différence de deux unités abstraites*. Cette proposition ne renferme point de contradiction, mais elle ne présente aucun sens. Les idées qu'elle allie ne sont point *opposées*, mais *disparates*.

33. Il est bon de faire attention à cette distinction entre *opposé* et *disparate*. Si les signes $+$ et $-$ n'avoient qu'une signification, le signe $-$ auroit nécessairement la même signification dans les deux membres de l'équation $\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 - (-\overline{AD}^2) = 1^2 - 1^2 = 0$. Cette équation offriroit

deux idées *opposées* regardées comme une seule et même idée. Elle seroit contradictoire. *Ce seroit la faute du signe* —. Mais si les signes + et — ont chacun deux significations, l'équation $\overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 = 1^2 - 1^2 = 0$ n'offre plus que deux idées *disparates*. Elle est l'effet d'une confusion d'idées. *C'est la faute de l'analiste.*

34. Cette distinction me paroît prévenir les objections insurmontables que Mr. Carnot fait, dans le discours préliminaire de sa *Géométrie de Position*, contre cette proposition : les signes + et — indiquent deux directions opposées. Ses objections supposent tacitement que ces signes n'ont qu'une signification.

35. Autre exemple. Selon la manière ordinaire de s'exprimer, on a (Fig. 1.) $\overline{BD}^2 = 1^2 + 1^2$ Par conséquent $\overline{BD}^2 = (1 + \sqrt{-1^2})(1 - \sqrt{-1^2})$, et $1 + \sqrt{-1^2} : \sqrt{2} :: \sqrt{2} : 1 - \sqrt{-1^2}$, proportion absurde, si l'on attribue à $\sqrt{2}$ sa signification arithmétique. Mais si l'on multiplie la seconde raison de cette proportion par $1 + \sqrt{-1^2}$, on aura - - - - - - - - - $1 + \sqrt{-1^2} : \sqrt{2} :: \sqrt{2} \times \overline{1 + \sqrt{-1^2}} : 2$, ou $1 + \sqrt{-1^2} : \sqrt{2} \times \overline{1 + \sqrt{-1^2}} :: \sqrt{2} : \sqrt{2 \times \sqrt{2}}$, proportion dont la vérité saute aux yeux.

J'ai dit : *si on attache à* $\sqrt{2}$ *sa signification arithmétique ;* car si l'on attache à $\sqrt{2}$ sa signification géométrique, qui est de représenter la diagonale d'un carré dont le côté est 1, alors la proportion $1 + \sqrt{-1^2} : \sqrt{2} :: \sqrt{2} : 1 - \sqrt{-1^2}$ ne sera plus absurde. En effet, si $\sqrt{2}$ représente $\overline{BD}$ (Fig. 1.), il représente une ligne dont la direction, par rapport à $\overline{BA}$, peut être représentée de la manière suivante : soit $\sqrt{-1} = 1 \times e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$

($e$ étant la base des logarithmes hyperboliques et $\pi$ la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est 1); $1 \times e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$ signifie la ligne $\overline{AD}$ dont la direction est $e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$. De même $\sqrt{2} \times e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$ signifiera la ligne $\overline{BD}$ dont la direction est $e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}}$, c'est-à-dire, demi-perpendiculaire. Alors la proportion précédente deviendra $1 + 1 \,.\, e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} : \sqrt{2} \,.\, e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} :: \sqrt{2} \,.\, e^{-\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}} : 1 - 1 \,.\, e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$, ou bien $1 + \sqrt{-1} : \sqrt{2}(\cos. 45^\circ + \sin. 45^\circ \sqrt{-1}) :: \sqrt{2}(\cos. 45^\circ - \sin. 45^\circ \sqrt{-1}) : 1 - \sqrt{-1}$; ou bien $1 + \sqrt{-1} : \sqrt{2}\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right) :: \sqrt{2}\left(\frac{1-\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right) : 1 - \sqrt{-1}$, qui est identique.

36. Pour repandre sur cette matière autant de clarté qu'il m'est possible, je me proposerai quelques questions à resoudre. La première sera prise de l'ouvrage déjà cité de Mr. CARNOT. J'exposerai d'abord la solution qu'il en donne, ensuite la mienne. Ce rapprochement rendra plus sensibles les principes que je m'efforce d'établir dans ce Mémoire.

## *Problême* II.

37. Voici les termes de Mr. CARNOT (No. 58.)

" Proposons-nous cette question : une droite $\overline{AB}$ (Fig. 4.)
" étant donnée, trouver sur cette droite un point K, tel que
" le produit des deux segmens $\overline{AK}$, $\overline{BK}$, soit égal à une quan-
" tité donnée; par exemple, à la moitié du carré de $\overline{AB}$.

" Comme je ne sais encore si le point K doit se trouver sur
" la droite même $\overline{AB}$, ou sur son prolongement, j'établis

" d'abord mon calcul, en supposant que c'est sur la droite " même ; c'est-à-dire, que K tombe entre A et B.

" Cela posé, prenant $\overline{AK}$ pour l'inconnue, je la désigne par " $x$, et je nomme $a$, la droite donnée $\overline{AB}$; la condition du " problême me donnera donc $x\,(a - x) = \frac{1}{2}a^2$, ou $x^2 - ax +$ " $+ \frac{1}{2}a^2 = 0$, d'où je tire $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{-\frac{1}{4}a^2}$ [$= \frac{a}{2}(1 \pm \sqrt{-1})$], " c'est-à-dire, que $x$ est imaginaire.

" Je ne conclus pas de là que la solution du problême pro- " posé soit impossible ; mais seulement qu'elle l'est dans la " supposition que j'ai faite, que le point K est placé entre A et " B ; c'est-à-dire, que le problême a pu être mal mis en équa- " tion, parce que j'aurai établi mes raisonnemens sur une " figure qui n'étoit pas celle que je devois considérer, ou qui " ne pouvoit satisfaire aux conditions du problême. J'établis " donc de nouveau mon raisonnement, en partant d'une hy- " pothèse autre que celle que j'avois faite d'abord, c'est-à- " dire, que je supposerai le point cherché, non sur $\overline{AB}$, comme " je l'avois fait, mais sur un de ses prolongemens, par ex- " emple, en K'.

" Alors la condition du problême me donne $x(x - a) = \frac{1}{2}a^2$, " ou $x^2 - ax - \frac{1}{2}a^2 = 0$ ; d'où je tire $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$, équation " qui ne contenant plus d'imaginaires résout la question pro- " posée.

" Cette solution est double ; l'une $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$ étant " positive, résoud sans difficulté la question, conformément à " ma nouvelle hypothèse, c'est-à-dire, en supposant que le " point cherché est sur le prolongement de $\overline{AB}$, au de là du " point B ; ou que le point B se trouve entre A et le point " cherché. Mais l'autre solution $x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$ étant né-

" gative, ne peut se rapporter à la même hypothèse, et " d'après ce qui a été dit ci-dessus, il faut, pour en avoir la " signification, changer le signe, et voir à quel systême corré- " latif l'équation ainsi modifiée pourra satisfaire. Or de ce " changement il résulte, que l'équation $x(x-a)=\frac{1}{2}a^2$, qui " exprime la condition du problême, devient $x(x+a)=\frac{1}{2}a^2$. " Voyons à quel nouveau systême corrélatif peut satisfaire " cette nouvelle expression de la condition du problême.

" Or il est facile de voir que c'est en supposant que le point " K tombe sur le prolongement de $\overline{AB}$, non du côté de B, " comme ci-dessus, mais du côté de A en K″. Et en effet, " en partant de cette nouvelle hypothèse, $x$ sera $\overline{AK''}$, et $\overline{BK''}$ " sera $x+a$; d'où il suit que la condition du problême sera " $x(x+a)=\frac{1}{2}a^2$, et cette équation donnera $x=-\frac{1}{2}a\pm\sqrt{\frac{3}{4}a^2}$ " dont la racine positive est effectivement la même que celle " qui s'étoit présentée négativement."

38. Dans cette solution, Mr. Carnot raisonne rigoureusement d'après les principes fondamentaux de l'algèbre considérée comme *arithmétique universelle.* Ces principes n'admettant que des unités abstraites ne peuvent admettre de quantités négatives par elles-même, et à plus forte raison, de *carrés négatifs.* Conséquemment à ces principes, Mr. Carnot est obligé de changer sa première équation en une seconde qui en diffère essentiellement, et celle-ci en une troisième qui ne diffère de la seconde qu'en apparence. En effet sa première équation est $-x^2+ax-\frac{1}{2}a^2=0$ (1);
sa seconde - - - $+x^2-ax-\frac{1}{2}a^2=0$ (2),
et sa troisième - - $+x^2+ax-\frac{1}{2}a^2=0$ (3).

39. Or je dis que la première diffère *essentiellement* de la seconde. Si l'on met dans l'une et dans l'autre $y^2$ à la place de o, on aura $-x^2+ax-\frac{1}{2}a^2=y^2$ - - - (4), et -

$+x^2-ax-\frac{1}{2}a^2=y^2$ - - - (5).

La première de ces équations appartient à un cercle dont le rayon est imaginaire et dont je donnerai bientôt la description. La seconde appartient à une hyperbole équilatère dont l'axe est $\frac{a}{2}\sqrt{3}$.

40. Je dis que la seconde ne diffère de la troisième qu'en apparence. En effet ces deux équations donnent (en y mettant $y^2$ au lieu de o) - - - $x^2-ax-\frac{1}{2}a^2=y^2$ - - (5);

$x^2+ax-\frac{1}{2}a^2=y^2$ - - (6).

Elles appartiennent à la même hyperbole équalitère dont les axes sont $=\frac{a}{2}\sqrt{3}$. La première exprime les deux branches positives et sousentend les négatives. La seconde exprime les deux branches négatives et sousentend les positives.

41. Dans les principes de Mr. CARNOT qui sont, je le répéte, les principes fondamentaux de l'algèbre considérée comme *arithmétique universelle*, l'équation (1) ne donne aucune solution; la seconde n'en donne qu'une, et la 3e. une.

Dans les principes que j'ai exposés et qui appartiennent à l'*algèbre-langue*, ces trois équations donnent chacune deux solutions. Les deux solutions données par la seconde sont les mêmes que celles données par la troisième. Ainsi l'on peut supprimer l'une des équations. L'équation restante donnera les deux solutions de Mr. CARNOT. Quant à la première, il faut développer les deux solutions qu'elle donne dans mes principes.

42. Soit (Fig. 5.) AK $=+\frac{a}{2}$, BK $=-\frac{a}{2}$, KC (décrit sur le

plan de ce papier) $= + \frac{a}{2}\sqrt{-1}$, KD $= - \frac{a}{2}\sqrt{-1}$, KE (décrit perpendiculairement au plan de ce papier) $= + \frac{a}{2}\sqrt{-1}$, KG $= - \frac{a}{2}\sqrt{-1}$.

CEDG est un cercle décrit du centre K et du rayon $\frac{a}{2}\sqrt{-1}$, perpendiculairement au plan de ce papier.

Le même cercle peut être décrit d'un mouvement conique par l'apothême AE dont une extrémité seroit fixe au point A. Ce cercle CEDG ainsi décrit est celui qui satisfait à l'équation (4).

43. En effet changeons, dans cette équation, $x$ en $\left(z + \frac{a}{2}\right)$, c'est-à-dire, transportons l'origine des $x$, de A en K. Cette équation deviendra $-z^2 - \frac{a^2}{4} = y^2$, ou $y^2 = \left(\frac{a}{2}\sqrt{-1}\right)^2 - z^2$ (7).

Elle représente le cercle CEDG décrit du centre K et du rayon $\frac{a}{2}\sqrt{-1}$.

Remettons l'origine des abscisses en K. Nous reviendrons à l'équation (4), et les abscisses seront $x = \frac{a}{2} + z$. Or $\frac{a}{2} =$ AK est décrit sur le plan de ce papier. $z$ au contraire étant une partie du rayon KE $= \frac{a}{2}\sqrt{-1}$, ou KG $= -\frac{a}{2}\sqrt{-1}$, est perpendiculaire à AK. Donc l'abscisse $x$ est une ligne brisée formée de deux lignes perpendiculaires l'une à l'autre. Donc le nouveau rayon est la ligne brisée AKE. Si l'on fait tourner ce rayon sur AK, on aura le cercle CEDG. Or faire tourner le rayon AKE sur AK, c'est faire tourner en même temps AE d'un mouvement conique. Donc, comme je l'ai dit, le cercle CEDG décrit d'un mouvement conique par l'apothême AE, dont une extrémité est fixe au point A, est celui qui satisfait à l'équation (4).

44. Dans cette équation (4), $y$ est une ordonnée prise sur le rayon KC $= +\frac{a}{2}\sqrt{-1}$, ou KD $= -\frac{a}{2}\sqrt{-1}$. Si l'on suppose $y = 0$, alors on a - - - - - - -

$$x = \text{AKE} = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{-1} = \frac{a}{2}(1+\sqrt{-1}), \quad - - -$$

ou $x = \text{AKD} = \frac{a}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{-1} = \frac{a}{2}(1-\sqrt{-1})$.

Ces deux valeurs de $x$ sont les deux racines de l'équation (1) qui est la première de Mr. CARNOT.

45. Pour voir maintenant comment elles résolvent son problême, il suffit de l'énoncer de la manière suivante :

*Une droite* $\overline{AB}$ (Fig. 5.) *étant donnée, trouver sur cette droite un point* K (projection de la ligne $\overline{KE}$ sur la ligne $\overline{AB}$) *tel que le produit des* (deux lignes $\overline{AE}$, $\overline{BE}$ dont les) *deux segments* $\overline{AK}$, $\overline{BK}$ (sont les projections) *soit égal à la moitié du carré de* $\overline{AB}$.

Il suffit donc, pour faire cadrer l'équation (1) avec la question proposée, d'en regarder les *données* comme des *projections*, et d'en rapporter les *demandes*, non à ces projections, mais aux lignes originales.

On pourroit aussi, sans rien ajouter à l'énoncé de Mr. CARNOT, supposer que le point K n'est un point que par rapport au plan de ce papier, c'est-à-dire que, quoiqu'il n'ait ni *longueur* ni *largeur sur* le plan de ce papier, il a une *hauteur au dessus*, et qu'ainsi, à quelque partie de cette hauteur que les lignes $\overline{AE}$ et $\overline{BE}$ puissent se joindre, elles sont censées se joindre à ce qu'on nomme le point K. Alors, dans la description de ce point, on ne feroit abstraction que des deux dimensions qui se trouvent sur le plan de ce papier, sans faire abstraction de celle qui en es dehors (No. 28). Dans ce cas

on pourroit retrancher de l'énoncé précedent toutes les parenthèses que j'y ai mises et qui sont des additions faites à l'énoncé de Mr. CARNOT.

46. Pour montrer maintenant que les lignes $\overline{AE}$, $\overline{BE}$ résolvent la question, c'est-à-dire, que leur produit est égal à la moitié du carré de $\overline{AB}$, il y a une observation à faire.

Ce n'est pas le produit *des lignes* $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, mais le produit de leurs *valeurs arithmétiques* qui résoud la question; car *un produit de lignes*, c'est-à-dire, un résultat de *lignes multipliées par des lignes* ne signifie rien. On ne demande pas une *figure géométrique*, mais un *nombre*. Or, pour avoir les valeurs arithmétiques de $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, il faut écarter de leurs expressions les signes qui n'ont trait qu'à leurs positions. Sans cette précaution, on confondroit les *signes des valeurs numériques* avec des *signes de position* ou des signes purement descriptifs. Cela posé, il est clair que $\overline{AE} = \overline{BE} = \sqrt{\overline{AK}^2 + \overline{KE}^2} = \sqrt{2\overline{AK}^2} = \overline{AK} \times \sqrt{2}$. Donc $\overline{AE} \times \overline{BE} = 2\overline{AK}^2 = 2\left(\frac{\overline{AB}}{2}\right)^2 = \frac{\overline{AB}^2}{2}$.

## *Problême* III.

47. Quel est le point où se joindront les extrémités D, E, des lignes $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ (Fig. 6.) tirées des extrémités A, B, de la ligne $\overline{AB}$, en supposant que la longueur de $\overline{AB}$ soit $2a$, celle de $\overline{AD}$, $\frac{1}{2}a$, et celle de BE, aussi $\frac{1}{2}a$?

Cette question paroît évidemment absurde. Résolvons-la. Soit $\overline{Da} = x$, $\overline{Aa} = y$, $\overline{Eb} = x'$, et $\overline{Bb} = y'$. On a $\overline{AD}^2 = \frac{1}{4}a^2 = x^2 + y^2$, et $\overline{BE}^2 = \frac{1}{4}a^2 = x'^2 + y'^2$.

Or dire que les points D et E doivent *se joindre*, ou dire qu'ils doivent *toucher le même point*, c'est dire la même chose.

Il en est de même des points $a$ et $b$ qui doivent être l'un et l'autre sur le point C, milieu de la ligne $\overline{AB}$. On a donc $\overline{Aa} = y = a$, et $\overline{Bb} = y' = a$. Par conséquent $\overline{AD}^2 = \frac{1}{4}aa = x^2 + a^2$, et $\overline{BE}^2 = \frac{1}{4}aa = x'^2 + aa$. Ces deux équations donnent $x = x' = \pm \frac{\sqrt{-3}}{2} . a$, ou $x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} . a\sqrt{-1}$, quantité imaginaire, comme on devoit bien s'y attendre.

48. Montrons cependant que cette quantité imaginaire, indique un sens raisonnable dont la question proposée est susceptible.

Il est certain que, tant qu'on regardera les lignes $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, comme des lignes étendues seulement en longueur, sans aucune largeur, et le point avec lequel elles doivent coïncider, comme un point sans extension, la question sera impossible (No. 28).

Mais le signe $\sqrt{-1}$ que renferme la solution indique ce qui peut la rendre possible, en indiquant une *largeur* dans les lignes $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, ou une *extension* dans le point C.

49. En effet, ce signe $\sqrt{-1}$ qui est attaché à $x$ dont la valeur est $\sqrt{3} \times \frac{a}{2}$, ou $\sqrt{3} \times \overline{AD}$, montre que $x$ doit être perpendiculaire à $\overline{AD}$ (No. 10).

D'après cela, on peut supposer que les lignes $\overline{AD}$ et $\overline{BE}$, dont la longueur est $\frac{a}{2}$, ont une largeur $= \sqrt{3} \times \frac{a}{2}$. Dans cette supposition, ces lignes deviennent des rectangles $\overline{\overline{ADCF}}$, $\overline{\overline{BDCF}}$,* qui se joignent au point C. Dans cette même

* J'adopte ici, et dans le courant de ce Mémoire, la notation de Mr. CARNOT. Dans cette notation les lignes sont désignées par des lignes mises au dessus des lettres qui indiquent leurs extrémités. Les parallélogrammes le sont par de doubles lignes, les angles par des lignes brisées, et les courbes par des lignes courbes.

supposition, quoique les extrémités D et E des lignes $\overline{AD}$ et $\overline{BE}$ ne se joignent pas, elles sont les projections du point de jonction C sur les lignes $\overline{AD}$ et $\overline{BE}$ dont elles sont les extrémités.

50. On peut encore supposer que le point de jonction, au lieu d'être sans extension, en a une, et qu'au lieu d'être un cercle infiniment petit dont le rayon est o, c'est un cercle fini dont le rayon est $\sqrt{3}\ \frac{a}{2}$. Dans cette supposition, les lignes sans largeur $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ (Fig. 7.) sont tangentes au même cercle DHEE'KD (regardé comme faisant la fonction d'un point) puisqu'elles sont perpendiculaires aux extrémités de ses rayons $\overline{CD}$, $\overline{CE}$.

51. On peut réunir les deux suppositions précédentes. Par exemple, on peut donner aux lignes $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, les largeurs $\overline{Dd}$, $\overline{Ee}$, prises à volonté, et attribuer au point C l'étendue du cercle $\overparen{dhee'kd'}$. Dans cette nouvelle supposition, les rectangles $\overline{\overline{ADdf}}$, $\overline{\overline{BEeg}}$, sont tangens au cercle $\overparen{dhee'kd'}$.

52. Enfin, au lieu de rectangles, on pourroit supposer des cylindres, et au lieu de cercles, des sphères.

53. Les descriptions que je viens de donner n'ont rapport qu'à la valeur positive de $x$ ou de $x'$, qui est $+\frac{\sqrt{-3}}{2}\ .\ a$. Pour avoir celles qui ont rapport à sa valeur négative $-\frac{\sqrt{-3}}{2}\ .\ a$, il suffit de transporter au dessous de la ligne $\overline{AB}$ tout ce qui se trouve au dessus, dans la Figure 7, et *vice versâ*.

*Problême* IV.

54. Soient deux plans carrés. Que le côté de l'un excède le côté de l'autre, de deux piés, et que le nombre des piés carrés contenus dans les deux pris ensemble soit 1. Quelles sont les dimensions de ces deux plans carrés?

Je désigne par $x$ le côté d'un de ces carrés, et par $\overline{x+2}$ le côté de l'autre. On a donc, par la question, l'équation $x^2+(x+2)^2=1$, ou $x^2+2x+2=\frac{1}{2}$, qui donne $x=-1\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$.

Ces valeurs de $x$ sont imaginaires. La question qu'elles résolvent est impossible, si on suppose en même temps ces carrés sans épaisseur et sans vides. Mais si on leur suppose quelque épaisseur ou quelque vide, alors la question n'est plus impossible.

55. Voyons ce que nous indiquent les signes $+$, $-$, $\pm\sqrt{-1}$. On peut les interpréter, soit géométriquement, soit arithmétiquement.

56. Signes interprétés géométriquement.

Le côté de l'un de ces carrés est $-1\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$, et le côté de l'autre, $+1\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$. $-1$ et $\pm\sqrt{-1}$ indiquent deux lignes dont l'une est perpendiculaire à l'autre. Par conséquent si $(-1\pm\sqrt{-\frac{1}{2}})$ indique une seule ligne, l'une des deux quantités qui composent $(-1\pm\sqrt{-\frac{1}{2}})$ indique la *longueur* de cette ligne, et l'autre, l'*épaisseur de son point extrême*. Elles ne peuvent pas exprimer, l'une la *longueur* et l'autre la *largeur*, parcequ'il est de l'essence du carré exprimé algébriquement que sa *longueur* et sa *largeur* aient la même expression. Il en est de même de $+1\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$.

Supposons que $\pm\sqrt{-\frac{1}{2}}$ soit la *longueur* de ces côtés. Alors $+1$ sera l'*épaisseur du point extrême*, dans un des carrés demandés, et $-1$ l'*épaisseur de ce point*, dans l'autre. Soit (Fig. 8.) $\overline{AB'} = \overline{A'B} = 1$. On aura $\overline{AA'} = \overline{AB} = \overline{A'B'} = \overline{BB'} =$ (arithmétiquement) $\sqrt{\frac{1}{2}}$. La *longueur* du côté cherché sera donc $\overline{AA'}$, et l'*épaisseur de son point extrême*, $\overline{AB'}$.

57. Il s'agit de savoir si ces valeurs résolvent la question proposée.

La première condition de cette question est que le côté d'un des carrés excède le côté de l'autre, de deux piés. Pour savoir de combien une ligne surpasse une autre ligne, il faut les poser l'une sur l'autre. Ce qui reste découvert est l'excédent. Lorsque ces lignes sont les côtés de deux carrés, ce sont les carrés qu'il faut poser l'un sur l'autre.

Faisons donc cette opération. Pour cela j'élève le plan du carré ABA'B' dont le côté est $+\sqrt{-\frac{1}{2}}$ ou $-\sqrt{-\frac{1}{2}}$ perpendiculairement au plan de ce papier, de sorte que son côté $\overline{AB}$ se trouve sur ce papier même, comme on le voit en $\overline{AB}$, Figure 9. J'applique ensuite, par la pensée, le plan du second carré sur celui du premier. Ce second plan est aussi = ABA'B', et son côté = $\overline{AB}$. La Figure 9. nous montre les côtés $\overline{AB}$ de nos carrés appliqués l'un sur l'autre. L'*épaisseur du point extrême* de l'un est $\overline{Aa} = \overline{Bb} = +1$, et *celle du point extrême* de l'autre, $\overline{Aa'} = \overline{Bb'} = -1$. Ces épaisseurs restent à découvert. Leur somme est $+1+1=2$; car les signes $+$ et $-$ que portent les valeurs de ces épaisseurs représentent leurs *directions*, puisqu'ils sont interprétés géométriquement. Ils ne signifient pas que l'une doive être ôtée de l'autre.

58. Ce n'est donc pas *la différence des longueurs* des côtés qui est égale à 2, comme le demande la question, mais *la somme des épaisseurs de leurs points extrêmes.* Cette solution peut cependant se rapprocher de ce que demande la question, en la considérant ainsi: l'excédent du côté d'un carré sur l'autre est égal à la différence de position de l'une de leurs extrémités, tandis que l'autre extrémité coïncide, dans les deux carrés. Ainsi, dans la Figure 9, les extrémités B et B coïncident, et les extrémités *a* et *a'* sont distantes l'une de l'autre, d'une longueur $=\overline{aa'}$. La question demande que cette distance soit $=2$, relativement à la *longueur* des côtés. La solution la donne $=2$, relativement à l'*épaisseur de leurs points extrêmes*, c'est-à-dire, relativement à une seconde *longueur* perpendiculaire à la première.

59. La seconde condition de nôtre question est que le nombre des piés carrés contenus dans les deux carrés pris ensemble soit 1. Or l'*épaisseur* des côtés ne doit entrer pour rien dans ce nombre de piés carrés, puisque des piés carrés sont des surfaces telles que, pour les mesurer, on ne promêne la mesure que dans deux dimensions.

Cela posé, le côté d'un des carrés est $+1 \pm \sqrt{-\frac{1}{2}}$ (en y comprenant la longueur et l'épaisseur, comme on le doit, puisqu'ils ont une épaisseur) et le côté de l'autre est $-1 \pm \sqrt{-\frac{1}{2}}$. Les deux carrés sont donc - - -

$$\left(-1 \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}}\right)^2 = \tfrac{1}{2} \mp 2\sqrt{-\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \mp \sqrt{-2}, \quad - \; - \; -$$

$$\text{et } \left(+1 \pm \sqrt{-\tfrac{1}{2}}\right)^2 = \tfrac{1}{2} \pm 2\sqrt{-\tfrac{1}{2}} = \tfrac{1}{2} \pm \sqrt{-2}.$$

Dans ces carrés, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$ sont *les carrés des longueurs ;* $\mp 2\sqrt{-\frac{1}{2}}$ et $\pm 2\sqrt{-\frac{1}{2}}$ sont *les sommes des épaisseurs des côtés de ces carrés.*

Par conséquent $\frac{1}{2}$ ét $\frac{1}{2}$ sont les faces. Donc *la somme des faces* des deux carrés est 1, comme la question le demande.

60. *Remarques.* 1°. On a vû que, dans la mesure des côtés, ce sont *les épaisseurs des points extrêmes*, et dans celle des carrés, les *faces* qu'il faut considérer. Cette circonstance est indiquée par les expressions de ces *côtés* et de ces *carrés*. Les expressions des côtés (qui sont $\overline{+1 \pm \sqrt{-\frac{1}{2}}}$ et $\overline{-1 \pm \sqrt{-\frac{1}{2}}}$) indiquent que les *longueurs* $(\pm \sqrt{-\frac{1}{2}})$ sont des perpendiculaires etrangères à la question, et que *les épaisseurs des points extrêmes* n'en sont pas. Les expressions des *carrés* (qui sont $\overline{\overline{\frac{1}{2} \pm 2\sqrt{-\frac{1}{2}}}}$ et $\overline{\overline{\frac{1}{2} \mp 2\sqrt{-\frac{1}{2}}}}$) indiquent que les *épaisseurs des côtés* sont imaginaires, et deviennent par là les perpendiculaires étrangères à la question, et que les *faces* sont réelles, comme elles doivent l'être, puisqu'elles sont l'objet de la question. C'est ce que représentent les Figures 9 et 10. Dans la première, les *épaisseurs des points extrêmes* ($\overline{\mathrm{A}a}$, $\overline{\mathrm{A}a'}$) sont sur le plan de ce papier. Dans la seconde, ce sont les *faces* ($\overline{\overline{\mathrm{ABA'B'}}}$). Or, dans une question où il s'agit de mesurer des lignes et des surfaces qui sont censées décrites sur un même plan, on ne doit mesurer que celles qui sont sur ce plan supposé.

61. 2°. Les côtés des carrés sont les lignes brisées $\widehat{a\mathrm{AB}}$, $\widehat{a'\mathrm{AB}}$ (Fig. 9). Les carrés même sont les plans brisés $\widehat{\widehat{a'\mathrm{A'A}ab\mathrm{BB'}}}$, $\widehat{\widehat{a''\mathrm{A'A}cb'\mathrm{BB'}}}$ (Fig. 10). Les lignes brisées présentent deux dimensions. Les plans brisés en présentent trois.

62. 3°. Dans la Figure 10, les plans qui expriment les épaisseurs des côtés ne sont établis que sur deux des côtés du

carré. Mais on pourroit les établir sur les quatre côtés sans que la solution du problême en souffrît. C'est une suite de l'indétermination dont il a été parlé au No. 15. Dans ce cas, les deux carrés que demande le problême se trouveroient former une boite dont ils seroient les deux moitiés. Cette boite ne contiendroit que des plans sans épaisseur. Les épaisseurs des côtés des carrés demandés seroient les hauteurs des ces deux moitiés de boite. Les carrés demandés seroient ses deux fonds, dont l'un supérieur et l'autre inférieur.

63. Signes $+$, $-$ et $\pm\sqrt{-1}$ interprétés arithmétiquement.

$\pm\sqrt{-1}$ n'a aucune signification arithmétique (No. 10); mais $\pm\sqrt{-1}\times\pm\sqrt{-1}$ $(=-1^2)$ en a une. $-1^2$ est un *carré soustractif*, et par conséquent formant *un vide* au milieu d'une surface pleine. De là il suit que, lorsqu'il s'agit de carrés et, en général, de plans, le signe $\pm\sqrt{-1}$ peut indiquer des vides, au lieu de perpendiculaires.

64. Mais les perpendiculaires ne diminuent ni n'augmentent les longueurs des lignes auxquelles elles sont perpendiculaires. Si donc on substitue des *vides* aux perpendiculaires et des *pleins* aux lignes auxquelles elles sont perpendiculaires, ces vides ne doivent pas diminuer ces pleins. Il faut donc faire une *addition de vide*, et non une *soustraction* de plein. Or ajouter des vides à une surface, c'est augmenter ses dimensions sans augmenter le nombre des piés carrés qu'elle contient; c'est l'augmenter *géométriquement*, sans l'augmenter *arithmétiquement*. De même, ajouter $+a\sqrt{-1}-a\sqrt{-1}$ à une quantité qui se *mesure* et qui se *compte*, c'est ajouter à sa *mesure* sans ajouter à sa *somme*. En effet, les signes $+$ et $-$

pris *géométriquement* indiquent des directions opposées, *en partant du même point*, et par conséquent des directions qui s'ajoutent ; au lieu que ces mêmes signes pris *arithmétiquement* se détruisent l'un l'autre.

65. La question proposée contient deux parties, l'une géométrique, l'autre arithmétique. La partie géométrique est *la disposition* des lignes et des surfaces (No. 2). La partie arithmétique est *le calcul* de nombre des piés linéaires contenus dans les côtés qui sont des lignes, et de celui des piés carrés contenus dans les carrés même qui sont des surfaces.

Or, dans cette seconde solution, où les signes $+$, $-$, $\pm\sqrt{-1}$ sont pris arithmétiquement, il ne peut être question que de la partie arithmétique du problême. Je puis donc ajouter tant de vides que je voudrai, puisqu'ils n'altèrent pas la solution arithmétique. Je puis donc résoudre la question proposée en réduisant les deux surfaces carrées à des cadres carrés tels, que le côté de l'un surpasse le côté de l'autre, de deux piés, et que chacun de ces cadres ait une surface égale à un demi pié-carré.

66. Il y a une infinité de manières de résoudre la question proposée, au moyen de cadres de cette espèce, puisqu'on n'a que deux conditions à remplir et quatre variables pour les remplir. Les deux conditions sont, la différence des côtés qui doit être $=2$, et la somme des carrés qui doit être $=1$. Les quatre variables sont, 1°. le côté du premier carré, 2°. celui du second, 3°. le côté du carré vide renfermé par l'un des cadres, 4°. le rapport entre la surface du premier cadre et celle du second. Dans la solution, on a fait ces surfaces égales chacune à la moitié d'un pié carré ; mais rien n'oblige à les faire égales.

67. *Remarques.* 1°. La différence entre les deux solutions précédentes consiste en ce que, dans la seconde, la différence des côtés est exprimée par *la différence de leurs longueurs* qui est une quantité arithmétique ; au lieu que, dans la première, elle est exprimée par *la différence de situation* de ces côtés qui est une quantité géométrique (No. 2).

68. 2°. On pourroit réunir les deux solutions précédentes et résoudre le problême au moyen d'une boite carrée dont les deux fonds contiendroient en somme un pié carré de *plein* et tant de *vides* qu'on voudroit, et dont les hauteurs seroient chacune d'un pié avec *tant et si peu de plein* qu'on jugeroit à propos.

On voit par là, pour le dire en passant, combien la question proposée qui sembloit précise l'étoit peu. Il est certain qu'elle peut être entendue de toutes les manières qu'offrent les solutions précedentes. Si cependant on ne veut pas y reconnoître toutes ces significations, on doit voir du moins que les expressions de la langue algébrique qui correspondent à celles du langage ordinaire sont infiniment plus étendues que celles-ci. Elles ne sont pas vagues, puisqu'on peut en trouver toutes les significations, à l'aide de quelques principes ; mais elles sont générales.

*Problême* V.

69. Un marbrier a deux cubes de marbre. Le côté d'un de ces cubes excède le côté de l'autre, de deux piés, et le nombre des piés cubes contenus dans les deux est 28. Quelles sont les dimensions de ces deux cubes ?

Avant de donner la solution de cette question, j'ai une remarque à faire.

Cette question conduit à une équation du 3e. dégré. Toute équation du 3e. dégré a au moins une racine réelle. Par conséquent si, au lieu de 28, qui est le nombre des piés cubiques contenus dans les deux cubes, on n'avoit, par exemple, que 3 piés et $\frac{1}{4}$, on devroit encore avoir une solution possible. Cette solution donneroit pour le nombre des piés cubiques contenus dans un des cubes, $\frac{27}{8}$, et dans l'autre, $-\frac{1}{8}$. Or, pour que ce résultat qu'on appelle possible eût un sens raisonnable, il faudroit supposer qu'un des deux cubes fût un vide fait dans l'autre, c'est-à-dire, qu'il faudroit supposer un cube de $\frac{27}{8}$ pouces cubiques contenant un vide de $\frac{1}{8}$ de pouce cubique. Mais cette solution est toute semblable à celle qu'ont fournie les racines imaginaires de l'équation du problême précédent. Les deux solutions ont donc la même espèce de possibilité, quoique l'une soit donnée par un résultat imaginaire et l'autre par un résultat qui ne l'est pas.

La solution même du problême précédent répond mieux à l'énoncé de la question que la solution de celui-ci; car, dans la première de ces questions, on demande deux plans carrés, c'est-à-dire, deux étendues qui aient chacune deux dimensions égales. Or une étendue peut être vide. Dans la seconde question, au contraire, on demande deux cubes *de marbre*. Or un cube de marbre n'est pas un cube de vide.

70. Revenons à nôtre 5e. problême.

Ce problême ne présente à l'esprit qu'une solution possible, et l'équation du 3e. dégré qui en exprime les conditions n'a qu'une racine réelle.

Cette équation est $x^3 + (x+2)^3 = 28$ - - (7).
Ses trois racines sont - - - - - - -

$x = 1$ . - - - - - - dont le cube est $x^3 = 1$ ;

$x = -2 + \sqrt{-6}$ - - dont le cube est $x^3 = 28 + 6\sqrt{-6}$;

$x = -2 - \sqrt{-6}$ - - dont le cube est $x^3 = 28 - 6\sqrt{-6}$.

Ces racines sont les côtés des cubes $x^3$.

Les côtés des cubes $(x + 2)^3$ sont

$x + 2 = 3$ - - dont le cube est $(x + 2)^3 = 27$;

$x + 2 = +\sqrt{-6}$ dont le cube est $(x + 2)^3 = -6\sqrt{6}$;

$x + 2 = -\sqrt{-6}$ dont le cube est $(x + 2)^3 = +6\sqrt{-6}$.

En raisonnant sur les deux dernières des racines $x$ et $\overline{x + 2}$ comme on a raisonné sur les deux racines $-1 \pm \sqrt{-\frac{1}{2}}$ qui résolvent la question précédente, on parviendra à des résultats semblables, l'un géométrique et l'autre arithmétique. Il y a cependant ici quelques remarques à faire.

71. 1°. Pour que le résultat géométrique soit juste, il faut que les mesures qu'il fournit remplissent les conditions de la question. Or si l'on raisonne relativement aux cubes comme on l'a fait (No. 60.) relativement aux carrés, on verra qu'il ne faut mesurer que ce qui ne porte pas le signe $\sqrt{-1}$. De plus, les mesures données par les termes réels sont justement ce qu'il faut pour satisfaire aux conditions de la question. Il ne faut donc pas mesurer les autres.

Mais il se présente ici une difficulté qui n'a pas lieu dans le cas du No. 60. C'est qu'un des cubes, savoir, $\overline{+\sqrt{-6}}$ ou $\overline{-\sqrt{-6}}$ est tout entier sous le signe $\sqrt{-1}$. Il ne faut donc en mesurer aucune partie. Il est donc étranger à la question. Il n'en remplit donc pas les conditions. Les conditions demandent deux cubes, et l'on n'en trouve qu'un.

Il faut convenir que, dans ce cas, les deux racines imaginaires

de l'équation ne donnent que des solutions impossibles, si on les considère géométriquement, c'est-à-dire, si l'on s'en tient aux lignes même et aux positions de ces lignes fournies par ces deux racines.

72. Elles peuvent cependant résoudre la question, même géométriquement, elles sont même les seules qui le puissent, si l'on énonce cette question de la manière suivante:

Un marbrier se propose de tailler deux cubes de marbre. Il veut que le côté d'un de ces cubes excède le côté de l'autre, de deux piés; mais il ne peut y employer que 28 piés cubiques de marbre. Cette quantité n'étant pas suffisante pour la grandeur des cubes qu'il veut avoir, il est obligé d'y joindre de faux marbre pour remplir les vides que l'accroissement des dimensions doit occasionner entre les parties du vrai marbre. Cependant il désire, 1°. que la quantité de ce faux marbre qui remplit les vides laissés par le vrai marbre, soit *la plus petite* possible; 2°. qu'en même temps l'étendue des deux cubes soit *la plus grande* possible. Quelle doit être la quantité de faux marbre ou de vide? et quelles doivent être les dimensions des deux cubes?

73. Puisque la quantité de faux marbre ou de vide doit être un *minimum*, l'addition faite au côté du cube composé de vrai et de faux marbre doit être aussi un *minimum*. De plus, puisque cette addition est étrangère au vrai marbre, elle doit être étrangère à ses dimensions, et par conséquent à leur longueur. Donc la ligne qui exprime une quelconque des dimensions du faux marbre doit être perpendiculaire à celle qui exprime la dimension correspondante du vrai marbre. Donc le côté du cube formé de vrai et de faux marbre doit être une ligne brisée.

Soit cette ligne brisée $(x \pm y\sqrt{-1})$, $x$ étant la partie correspondante au vrai marbre, et $\pm y\sqrt{-1}$ la partie correspondante au faux. Nos cubes seront donc $(x \pm y\sqrt{-1})^3$ et $(x + 2 \pm y\sqrt{-1})^3$.

Puisque $y\sqrt{-1}$ doit être un *minimum*, sa variation doit être $= 0$. Puisque $x$ est constant, sa variation doit aussi être $= 0$. Mais il y a ici une remarque à faire.

Si l'on prenoit les variations ou les différentielles de $(x \pm y\sqrt{-1})^3$ et de $(x + 2 \pm y\sqrt{-1})^3$ à l'ordinaire, on regarderoit par là même $x$ et $\pm y\sqrt{-1}$ comme ayant leurs variations distinctes. On prendroit $(x \pm y\sqrt{-1})$, non comme une *seule* ligne brisée, mais comme *deux* lignes distinctes. Le faux marbre n'auroit d'autre *minimum* que zéro, et la question ne seroit pas résolue. Il faut donc lier $\pm y\sqrt{-1}$ à $x$. Pour cela, il faut les regarder comme le sinus et le cosinus d'un même arc et que cet arc seul varie.

74. Soit $u$ l'arc dont $y$ est le sinus et $x$ le cosinus. Soit de plus $e$ le nombre dont le logarithme hyperbolique est 1. On aura

$$(x \pm y\sqrt{-1})^3 = e^{l(x \pm y\sqrt{-1})^3} = e^{3l(x \pm y\sqrt{-1})} = e^{3l(\cos. u \pm \sin. u\sqrt{-1})}$$

$$= e^{3l\left\{\frac{\cos. u \pm \sin. u\sqrt{-1}}{\sqrt{\cos.^2 u + \sin.^2 u}}\right\} \times \sqrt{\cos.^2 u + \sin.^2 u}} = e^{3\left\{l\sqrt{\cos.^2 u + \sin.^2 u} + l\left(\frac{\cos. u \pm \sin. u\sqrt{-1}}{\sqrt{\cos.^2 u + \sin.^2 u}}\right)\right\}}$$

$$= \left\{\text{en remarquant que } l\,\frac{\cos. u \pm \sin. u\sqrt{-1}}{\sqrt{\cos.^2 u + \sin.^2 u}} = l\,\frac{\cos. u \pm \sin. u\sqrt{-1}}{\text{rayon}} = \pm u\sqrt{-1}\right\}$$

$$= e^{3\left\{l\sqrt{x^2+y^2} \pm u\sqrt{-1}\right\}} = e^{3\left\{l(xx+yy)^{\frac{1}{2}} \pm u\sqrt{-1}\right\}},$$ dont la différentielle est $\pm 3du\sqrt{-1} \times e^{3l(xx+yy)^{\frac{1}{2}} \pm 3u\sqrt{-1}}$, ou $\pm 3du\sqrt{-1}$ $(x \pm y\sqrt{-1})^3$.

On a donc $\pm 3du\sqrt{-1}$ $(x \pm y\sqrt{-1})^3$ $\pm 3du'\sqrt{-1}$

$.(x+2\pm y\sqrt{-1})^3=0$, en désignant par $u'$ l'arc dont $\pm y\sqrt{-1}$ est le sinus et $\overline{x+2}$ le cosinus. L'intégrale de cette équation est $(x\pm y\sqrt{-1})^3+(x+2\pm y\sqrt{-1})^3+C=0$. Pour déterminer la constante C, je remarque que, quand $y=0$, on doit avoir l'équation (7). Donc $C=-28$, et l'équation du *minimum* est $(x\pm y\sqrt{-1})^3+(x\pm y\sqrt{-1}+2)^3-28=0$.

Cette équation donne pour $x+y\sqrt{-1}$ les mêmes valeurs que l'équation (7.) pour $x$. On a donc - - -

$x\pm y\sqrt{-1}=1$, ou $=1+0\times\sqrt{-1}$; - - - (8).

$x\pm y\sqrt{-1}=-2+\sqrt{-6}$; - - - - (9).

$x\pm y\sqrt{-1}=-2-\sqrt{-6}$; - - - - (10).

75. Ces valeurs de $(x\pm y\sqrt{-1})$ sont des *minima* et non des *maxima.*

En effet l'équation (10), par exemple, c'est-à-dire, $x\pm y\sqrt{-1}+2+\sqrt{-6}=0$ est la racine d'une équation du second dégré dont l'autre racine est $x\mp y\sqrt{-1}+2-\sqrt{-6}=0$. Cette équation est donc $(x\pm y\sqrt{-1})(x\mp y\sqrt{-1})=$ $=(2+\sqrt{-6})(+2-\sqrt{-6})=+10$. - - -

Faisons $(x\pm y\sqrt{-1})=z$, et $(x\mp y\sqrt{-1})=+v$. Nous aurons $zv=10$, équation à l'hyperbole entre ses assymptotes. Or l'hyperbole est toute convexe par rapport à ses assymptotes. Si donc une de ses ordonnées ou de ses abscisses est ou un *maximum* ou un *minimum*, ce ne peut être qu'un *minimum.* En effet les diagonales des ligne brisées $(x\pm y\sqrt{-1})$ et $(x\mp y\sqrt{-1})$ sont des *minima* par rapport à cette hyperbole.

76. De plus, il est facile de montrer, d'après une autre considération, que la quantité du faux marbre est un *minimum.*

En effet, le vrai et le faux marbre sont liés de manière que leur ensemble forme une seule unité. Par conséquent les quantités de l'un et de l'autre sont en même temps ou des *minima* ou des *maxima*. Or la quantité du vrai marbre est zéro et par conséquent un *minimum* dans l'un des cubes, et la quantité du faux marbre, dans l'autre cube, est aussi un *minimum*; car on ne peut diminuer cette quantité de faux marbre sans diminuer en même temps les 28 cubes du vrai marbre, ou sans altérer la forme cubique.

77. J'ajoute que, si l'on construit les deux cubes comme je vais le dire, on trouvera que leur étendue est un *maximum*, parcequ'on ne pourroit l'augmenter sans opérer une solution de continuité, ou sans que la quantité du faux marbre ne cessât d'être un *minimum*.

D'ailleurs l'équation $(x \pm y\sqrt{-1})^3 + (x + 2 \pm y\sqrt{-1})^3 - 28 = 0$, qui exprime l'étendue des cubes demandés et qui donne un *minimum* pour les côtés $(x \pm y\sqrt{-1})$ et $(x + 2 \pm y\sqrt{-1})$ de ces cubes, donne au contraire un *maximum* pour leur étendue. En effet elle se réduit à celle-ci: - - - - -

$(x \pm y\sqrt{-1} - 1)\{(x \pm y\sqrt{-1})^2 + 4(x \pm y\sqrt{-1}) + 10\} = 0$, ou

$\{x \pm y\sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-6}\} \times \{x \pm y\sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-6}\} = 0$, ou

(à cause de l'indépendance des signes + et —, et de ce qu'ils ne marquent ici que des directions qui n'affectent point les quantités) - - - - - - - - -

$\{x \pm y\sqrt{-1} + 2 + \sqrt{-6}\} \times \{x \mp y\sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-6}\} = 0.$

Cette dernière équation donne - - - -

1°. $(x \pm y\sqrt{-1})(x \mp y\sqrt{-1}) = 10$, équation à l'hyperbole; (11) c'est celle du No. 75;

2°. $x^2 + y^2 = 10$, équation au cercle - - - (12).

Dans l'équation (11), les coordonnées brisées qui expriment les côtés des cubes, ont (comme je l'ai dit) pour diagonale, un axe d'hyperbole qui est un *minimum.*

Dans l'équation (12), le premier membre qui quoique de deux dimensions seulement, exprime une nouvelle unité qui change l'étendue 28 du vrai marbre en une autre étendue plus considerable, ce premier membre, dis-je, représente le carré du rayon d'un cercle, lequel rayon est un *maximum.*

78. Ainsi les deux conditions de la question sont exactement remplies, quoiqu'elles semblent contradictoires. On voit par là que les imaginaires renfermées dans l'équation du problême, bien loin de confirmer cette contradiction, fournissent les moyens de concilier ces conditions.

79. Il ne s'agit plus que de construire les cubes donnés par les valeurs de $x \pm y\sqrt{-1}$ que présentent les équations (8), (9) et (10). Le premier qui est le seul appellé *réel* est spécialement exclu par l'état de la question. Construisons donc le second et le 3e.

Comme le faux marbre est destiné à remplir les vides laissés par le vrai marbre, il ne s'agit que de voir quels seront les vides contenus dans les cubes $(-2+\sqrt{-6})^3$ et $(-2-\sqrt{-6})^3$. Ces cubes sont - - - - -

$-8+12\sqrt{-6}+36-6\sqrt{-6}$, et - - - -

$-8-12\sqrt{-6}+36-6\sqrt{-6}$.

Or ces cubes renferment deux sortes de vides, savoir, 1°. ceux qu'indique le signe $-$; 2°. ceux qu'indique le signe $\sqrt{-1}$. Les premiers sont des *pleins soustractifs.* Les seconds sont des *vides absolus.*

80. En effet 1°. $-8$ est un cube qui a ses trois dimensions

et qui par conséquent est *plein*, et comme il porte le signe —, il est *soustractif*. 2°. Au contraire $-6\sqrt{-6}$ n'a que deux dimensions pleines.

Pour le prouver, je remarque que $\pm 6\sqrt{-6} = +\sqrt{6} . -\sqrt{6} . \mp\sqrt{-1}\sqrt{6}$. Or le signe $\sqrt{-1}$ attaché à $\sqrt{6}$ marque (No. 10.) que $\sqrt{-1}\sqrt{6}$ est perpendiculaire à ce qu'il seroit, s'il ne portoit pas ce signe; et s'il ne portoit pas ce signe, on auroit $+\sqrt{6} . -\sqrt{6} . \mp\sqrt{6} = \pm(\sqrt{6})^3$ qui est un cube dont les trois dimensions sont pleines. Puisque les trois dimensions de $\pm(\sqrt{6})^3$ sont pleines, les trois lignes marquées par $+\sqrt{6}$, $-\sqrt{6}$ et $\pm\sqrt{6}$ sont perpendiculaires entr'elles et la ligne marquée par $\pm\sqrt{6}$ est perpendiculaire au plan des deux lignes marquées, par $+\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$. Si donc $\pm\sqrt{6}$ devient $\pm\sqrt{-1} . \sqrt{6}$, la ligne marquée par $\pm\sqrt{-1} . \sqrt{6}$ se trouvera nécessairement dans le plan des deux autres lignes. Le cube se trouvera donc réduit à un plan. Il ne sera donc plein que dans deux de ses dimensions. La troisième dimension sera donc ou vide ou nulle.

81. Maintenant je dis qu'elle sera vide et non pas nulle, ou plutôt, qu'elle sera *vide géométriquement et nulle arithmétiquement*.

Comme cette distinction est un point fondamental dans les principes que j'expose, il faut que je l'explique.

Si, après avoir parcouru une toise dans un sens quelconque, je la parcours une seconde fois en revenant au point de départ, le nombre des toises que je parcourrai sera $=2$, et la quantité dont je m'éloignerai du point de départ sera $=0$. Ces deux résultats donnent les deux significations de $\overline{+1-1}$. Le

premier donne sa signification *géométrique*, et le second, sa signification *arithmétique*. Le premier exprime les opérations, et le second en exprime la conséquence. Le premier représente les mesures prises qui sont les données du calcul *à faire*, et le second représente le calcul *fait* d'après ces données. Pour savoir donc si ce sont les données ou leur conséquence qu'exprime $+\sqrt{6}$. $-\sqrt{6}$. $\mp\sqrt{-1}\sqrt{6}$, il faut examiner ce qui est demandé par la question. Or, la question est de construire un cube et de déterminer ce qu'il contient de matière réelle. Mais pour construire un cube, il faut avoir son côté et l'étendre dans les trois dimensions. Pour déterminer ce qu'il contient de matière réelle (lorsqu'on sait d'ailleurs qu'il en peut contenir qui ne le soit pas) il faut savoir combien de matière réelle s'étend dans ses trois dimensions. Le premier point de la question, qui consiste à *mesurer*, est géométrique. Le second, qui consiste à *compter*, est arithmétique. Or la réponse au premier point de la question donne *trois* dimensions, et celle au second point n'en donne que *deux*. La troisième dimension est donné *réelle géométriquement et nulle arithmétiquement*. Cependant elle ne peut pas être réelle et nulle en même temps. Elle renferme donc deux choses dont l'une est réelle et l'autre nulle. C'est donc un vide et non une nullité absolue. La matière est nulle; mais l'espace est réel. La 3e. dimension est donc *vide géométriquement et nulle arithmétiquement*. Donc le signe $\sqrt{-1}$ mis devant l'expression d'un cube ou d'un parallélipipède marque *un vide* dont l'étendue est égale à celle de ce cube ou de ce parallélipipède.

82. Il s'agit maintenant d'expliquer la différence qui se

trouve entre ce que j'ai appellé *plein soustractif* et ce que j'ai nommé *vide absolu.** Le plein soustractif est, comme je l'ai dit, désigné par le signe —, et le vide absolu, par le signe $\sqrt{-1}$. La différence entre le plein soustractif et le vide absolu n'est donc que la différence de ce qu'expriment les signes — et $\sqrt{-1}$. Le signe $\sqrt{-1}$ appliqué à un espace qui s'étend dans les trois dimensions, marque *par lui-même* la destruction, non pas de l'espace qui a été rempli, mais de la matière qui le remplissoit. Le signe — marque cette même destruction, mais non *par lui-même.* Il faut, pour qu'il la marque, qu'il soit accompagné du signe +. Ainsi, par exemple, dans le cube $-8-12\sqrt{-6}+36+6\sqrt{-6}$, pour que $-8$ représente un vide, il faut écrire ce cube ainsi: $-8-12\sqrt{-6}+8+28+6\sqrt{-6}$. Or je dis que $-8+8$ désigne un vide dont la partie $-8$ s'étend selon la direction marquée par —, et la partie $+8$ s'étend selon la direction marquée par +. Conséquemment, l'espace $-8+8+28$ considéré *géométriquement*, c'est-à-dire, par rapport à son *étendue abstraite*, renferme les trois espaces désignés par 28, $-8$ et $+8$, savoir, 28 pieds cubiques dans le sens +, 8 cubiques dans le sens + et 8 pieds cubiques dans le sens —. Il renferme donc 44 pieds cubiques. Mais ce même espace considéré *arithmétiquement*, c'est-à-dire, par rapport à son *étendue matérielle* ne contient que l'espace marqué par la valeur

* (Na.) Ces considérations sur le plein et le vide peuvent paroître plus que singulières dans une question de géométrie; mais puisque j'introduis dans mon analyse des signes qui ont deux significations indépendantes l'une de l'autre, il faut bien que j'obtienne des résultats de deux espèces, c'est-à-dire, des résultat ont l'un ait un caractère que l'autre n'a pas. *La présence* et l'*absence* de ce caractère sont ce que j'appelle *plein* et *vide*, quel que soit ce caractère.

arithmétique de $-8+8+28$ qui est $=28$. Ainsi, tandis que $+6\sqrt{6}\sqrt{-1}$ représente un vide cubique $=6\sqrt{6}$, $-8$ conduit à un vide $=8\times 2$.

83. Ce résultat, tout paradoxal qu'il est, est la conséquence d'une propriété remarquable des quantités imaginaires, savoir, d'être des *logarithmes*.

N[a]. Qu'il me soit permis ici d'interrompre mon sujet, pour m'arrêter un peu sur les propriétés logarithmiques du signe $\sqrt{-1}$.

84. [*Propriétés logarithmiques du signe* $\sqrt{-1}$. Je dis qu'en général, si l'on regarde $\sqrt{-1}$, non comme la racine (racine impossible) du *carré arithmétique* $-1$ (carré pareillement impossible), mais comme le signe de *l'opération géométrique* par laquelle on éléve une perpendiculaire, on aura $(\sqrt{-1})^n = \pm n(\sqrt{-1})$.

Pour le prouver, supposons d'abord $n$ un nombre entier impair. Nous aurons $\sqrt{-1} = \dfrac{e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} - e^{-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}}{2} = e^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$.

Donc $(\sqrt{-1})^n = e^{\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}} = e^{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}+\text{\&c.}\right)\sqrt{-1}}$
$= e^{(90°+90°+90°+\text{\&c.})\sqrt{-1}}$.

Mais que peut signifier cet exposant $(90°+90°+\text{\&c.})\sqrt{-1}$? Dans $ax^n$, l'exposant $n$ marque que $x$ multiplie $a$ autant de fois que $n$ renferme d'unités. Ainsi, dans $ax^n$, $n$ est un signe d'opérations arithmétiques. Mais aucune opération arithmétique ne peut être désignée par $(90°+90°+\text{\&c.})\sqrt{-1}$. Cet exposant est donc le signe d'opérations *purement géométriques* (No. 2), c'est-à-dire, d'opérations où l'on n'a en vue que les *directions*, sans considérer les *longueurs*.

85. Il n'y a nulle analogie entre une *multiplication* et une *direction.* Comment donc se faire une idée claire d'un exposant qui indique *une somme de directions*, quand l'idée qu'on a coutume d'attacher exclusivement à un exposant est, qu'il indique *une somme de multiplications?*

Un seul moyen se présente. C'est de trouver une idée complexe qui renferme les deux idées de *multiplication* et de *direction.* Or *la mesure de l'étendue* présente cette idée complexe (No. 2).

Prenons pour exemple le carré ABCD (Fig. 11). Pour mesurer ce carré, *je porte la mesure* de A en B, puis de B en D, dans une *direction perpendiculaire* à celle de AB. Voilà l'idée de *direction.* Ensuite *je compte* séparément les parties de AB et les parties de BC, puis je *multiplie* le nombre des premières par celui des secondes. Voilà l'idée de *multiplication.* De ces deux idées ne conservons que la première, puisque la seconde est exclue par le signe $\sqrt{-1}$. Dans ce cas, l'exposant $(90^\circ + 90^\circ + \&c.)\sqrt{-1}$ exprimera un simple arc de cercle *perpendiculaire au rayon*, et le nombre des multiplications qu'il exprimera sera $= 0$. De là il suit que, pour ramener l'exposant $(90^\circ + 90^\circ + \&c.)\sqrt{-1}$ aux exposans ordinaires, c'est-à-dire, aux exposans qui sont des signes de multiplications, il faut le multiplier par o. On aura donc $e^{0\times(90^\circ + 90^\circ + \&c.)\sqrt{-1}} = e^{0\times n \,.\, 90^\circ\sqrt{-1}} = 1 + le^{0\times n \,.\, 90^\circ\sqrt{-1}} =$ $= 1 + 0 \times n \,.\, 90^\circ\sqrt{-1} \,.\, le =$ (voyés la note cy dessous)* $1 + 0 \times n \,.\, 90^\circ\sqrt{-1}$.

* On peut objecter contre cette équation que le o que j'ai ajouté au terme $n \,.\, 90^\circ\sqrt{-1}$ ne le rend point nul, et que par conséquent la véritable équation n'est pas $e^{0\times n \,.\, 90^\circ\sqrt{-1}} = 1 + 0 \times n \,.\, 90^\circ\sqrt{-1}$, mais - - - - - -

L'expression $0 \times n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1}$ renferme deux parties, savoir, $n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1}$ et 0.

Soit (Fig. 11.) l'arc $\widehat{AEI} = n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1}$. Le signe $\sqrt{-1}$ que renferme $n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1}$ marque que $\widehat{AEI}$ est perpendiculaire au plan de ce papier. En effet si $n \,.\, 90^\circ$ ne portoit pas le signe $\sqrt{-1}$, il seroit déja perpendiculaire au rayon $\overline{CA}$. Or le signe $\sqrt{-1}$ ne peut pas le faire cesser d'être perpendiculaire à ce rayon, puisqu'il ne peut pas le faire cesser d'être un arc de cercle décrit de ce rayon. Donc le signe $\sqrt{-1}$

$$e^{0 \times n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1}} = 1 + 0 \times n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1} + \frac{(0 \times n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1})^2}{1 \,.\, 2} + \frac{(0 \times n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1})^3}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} + \&c.$$

Pour prévenir cette objection, je remarque

1°. Que ce qui est représenté par une série ne peut être que le résultat d'une suite d'opérations purement arithmétiques; que par conséquent on n'y doit considérer que la valeur arithmétique. Or $0 \times n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1}$ est *arithmétiquement* - -

$= 0 \times n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1} + \frac{(0 \times n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1})}{1 \,.\, 2} + \&c.$ C'est ce qu'il est facile de montrer. En effet si $n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1}$ exprime quelque chose, ce ne peut être qu'un arc indéfini $\widehat{AEI}$ (Fig. 11.) qui (comme je le prouverai dans le texte) doit être perpendiculaire au plan de ce papier. Cet arc est purement descriptif. La chose dont il détermine la position est la seule qu'on doive considérer dans la série précédente. Mais quelle est cette chose dont l'arc $\widehat{AEI}$ détermine la position? Cette chose, quelle qu'elle soit, doit être sur le plan de ce papier. Or l'arc $\widehat{AEI}$ étant perpendiculaire au plan de ce papier ne peut déterminer sur ce plan que deux points. La chose qu'il y détermine se réduit donc à deux points dont *la valeur arithmétique* est nulle. Donc tous les termes de la série précédente, à l'exception du premier (qui est 1) sont arithmétiquement nuls.

Je remarque 2°. que les termes qui, dans cette série suivent le terme $0 \times n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1}$ n'ajoutent rien à *sa valeur descriptive*. En effet tous ces termes sont rendus descriptifs par *le signe descriptif* $n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1}$ qu'ils contiennent. Chacun de ces termes se reduit donc au signe descriptif $n \,.\, 90^\circ \sqrt{-1}$ répété un nombre quelconque de fois. Cette répétition modifie à la vérité l'étendue de l'arc $\widehat{AEI}$, mais elle ne lui

joint au signe de l'arc de cercle $n \cdot 90°$ marque une double perpendicularité, c'est-à-dire, la perpendicularité à un plan. Or ce plan ne peut être que celui de ce papier. A l'égard de o, nous l'avons posé pour exprimer une *nullité de multiplication* . $0 \times m \times 90°\sqrt{-1}$ n'exprime donc qu'*une trace de ligne* mise au bout de la ligne $\overline{CA}$ et qui lui est perpendiculaire. Donc, en représentant $0 \times n \cdot 90°\sqrt{-1}$ par T $(\widehat{AEI})$ qui signifie *trace de* $\widehat{AEI}$, nous aurons (supposé $\overline{CA} = 1$) $1 + 0 \times n \cdot 90°\sqrt{-1} = \overline{CA} + T(\widehat{AEI})$. Donc - -

$$\frac{e^{+T(\widehat{AEI})} - e^{-T(\widehat{AEI})}}{2} = \frac{\left\{\overline{CA} + T(\widehat{AEI})\right\}}{2} - \frac{\left\{\overline{CA} - T(\widehat{AEI})\right\}}{2} = T(\widehat{AEI})$$

86. Ainsi, quoiqu'on ait $\dfrac{e^{+\widehat{AEI}\sqrt{-1}} - e^{-\widehat{AEI}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin. \widehat{AEI}$, on a $\dfrac{e^{+T(\widehat{AEI})} - e^{-T(\widehat{AEI})}}{2} = T(\widehat{AEI})$. Pour que ce point paroisse

fait pas décrire d'autres points sur le plan de ce papier. Elle n'ajoute donc rien à sa valeur descriptive.

Je remarque 3°. que la série précédente est $= \cos. 0 \times n \cdot 90° \pm \sin. 0 \times n . 90°\sqrt{-1} = 1$. Or cette même série $= 1 +$ une suite de termes dont $0 \times n \cdot 90°\sqrt{-1}$ est un des facteurs. Désignons cette suite de termes par T. Puisque $0 \times n \cdot 90°\sqrt{-1}$ est un des facteurs de T, T est donc (arithmétiquement) $= 0$. Il est donc purement descriptif. Or le rayon 1 exprime la distance du cercle et la circonférence. Donc la série entière $(1 + T)$ traduite en langage descriptif signifie : - - - -

***la distance* 1 *plus la description de l'arc*** $\widehat{AEI}$, ou, en d'autres termes ; - -

***la trace de l'arc*** $\widehat{AEI}$ ***décrit à la distance* 1 *d'un point pris comme centre.***

Or $e^{0 \times n \cdot 90°\sqrt{-1}}$ et $1 + 0 \times n \cdot 90°\sqrt{-1}$ ont l'un et l'autre cette même signification. Donc l'équation $e^{0 \times n \cdot 90°\sqrt{-1}} = 1 + 0 \times n \cdot 90°\sqrt{-1}$ est une équation identique.

clair, il suffit de remarquer, 1°. que ce qui est exprimé par $\widehat{AEI}$ renferme deux idées, savoir celle de *nombre* et celle de *direction;* 2°. que lorsqu'on détermine un *sinus*, c'est sa *valeur numérique* seule qu'on détermine; 3°. que le signe $\sqrt{-1}$ exclut toute idée de nombre aussi bien que le signe o; 4°. qu'il en est de même de ce que je me suis proposé de désigner par $T(\widehat{AEI})$; 5° que $\frac{e^{+\widehat{AEI}\sqrt{-1}} - e^{-\widehat{AEI}\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, en anéantissant le signe $\sqrt{-1}$ de l'exposant par le signe $\sqrt{-1}$ du dénominateur, et en n'admettant pas le signe o, ne laisse que la valeur *numérique;* 6°. qu'au contraire $\frac{e^{+T(\widehat{AEI})} - e^{-T(\widehat{AEI})}}{2}$, en n'anéantissant pas le signe $\sqrt{-1}$ qui exclut toute idée de nombre, et en admettant le signe o, ne laisse subsister que la valeur *descriptive.*

87. On peut donc poser pour principe général, que $\frac{\left(e^{nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}\right)}{2}$ *divisé par* $\sqrt{-1}$ *est* = *sin.* nx, *tandis que* $\frac{e^{+0\times nx\sqrt{-1}} - e^{-0\times nx\sqrt{-1}}}{2}$ *non divisé par* $\sqrt{-1}$ *et* = n . T $(x)$.

Or je n'ai mis le signe o que pour ôter, par un signe connu, toute idée de multiplication; mais le signe $\sqrt{-1}$ seul suffit pour exclure cette idée. On peut donc supprimer le zéro. Donc $\frac{e^{+nx\sqrt{-1}} - e^{-nx\sqrt{-1}}}{2} = nT(x)$. Donc $(\sqrt{-1})^n =$ $= \frac{e^{\frac{n\pi}{2}\sqrt{-1}} - e^{\frac{-n\pi}{2}\sqrt{-1}}}{2}$ (*n* étant un nombre entier impair) = $= n\,.\,T\left(\frac{\pi}{2}\right) = n(\sqrt{-1})$.

88. Cette équation, toute singulière qu'elle peut paroître, n'est que l'expression algébrique du principe posé au commencement de ce mémoire, savoir, *que* $\sqrt{-1}$ *est la signe de la perpendicularité, abstraction faite de toute longueur de ligne.* En effet le premier membre $(\sqrt{-1})^n$ marque que *le signe* $\sqrt{-1}$ *de la perpendicularité* est répeté $n$ fois, c'est-à-dire, est attaché $n$ fois à la même ligne 1. Le 2d. membre $n \,.\, T\left(\frac{\pi}{2}\right)$ marque que l'arc $\frac{\pi}{2}$ qui est *la mesure de la perpendicularité* est tracé $n$ fois.

89. J'ai supposé $n$ un nombre entier impair, afin que le signe $\sqrt{-1}$ ne s'anéantît pas. Si $n$ étoit un nombre entier pair, le signe $\sqrt{-1}$ s'anéantiroit, et l'on pourroit croire qu'alors l'équation $(\sqrt{-1})^n = n \,.\, T\left(\frac{\pi}{2}\right)$ n'auroit pas lieu, puisque (No. 86) j'ai fondé la vérité de cette équation sur ce que le signe $\sqrt{-1}$ qu'elle renferme exclut toute idée de nombre. Mais cette difficulté n'est qu'apparente. En effet lorsque $n$ est un nombre entier pair, ce n'est pas le signe $\sqrt{-1}$ qui disparoit, mais le sinus de l'arc $n \,.\, \frac{\pi}{2}$ qui devient $=0$. Alors, l'idée de nombre, bien loin de se trouver rétablie, se trouve doublement exclue, savoir, une fois par le signe $\sqrt{-1}$ qui subsiste toujours, et une seconde fois par l'anéantissement de la valeur numérique du sinus. Je dis que le signe $\sqrt{-1}$ subsiste toujours, parcequ'on ne peut l'anéantir qu'en le divisant par lui-même.

90. L'équation $(\sqrt{-1})^n = n \,.\, T\left(\frac{\pi}{2}\right)$ est donc aussi vraie, lorsque $n$ est un nombre entier positif. Maintenant je dis qu'elle est également vraie, quel que soit $n$, entier ou fractionnaire, positif ou négatif. Pour cela, il suffit de substituer

à l'idée de *perpendicularité* l'idée d'une *inclinaison* quelconque. Dans ce cas, les deux membres de l'équation - - -

$(\sqrt{-1})^{\pm\frac{n}{m}} = \pm\frac{n}{m} . T\left(\frac{\pi}{2}\right)$ exprimeront l'inclinaison $\frac{\pi}{2m}$ répétée $n$ fois dans le sens + ou dans le sens —.

91. De ce qui vient d'être dit je tire deux conséquences.

Premiere conséquence. Soit R un rayon quelconque. $R(\sqrt{-1})^n$ exprime la trace d'un arc quelconque $\frac{n\pi}{2}$ décrit du rayon R. Si $R = \frac{r}{0}$ et $n = p \times 0$, $\frac{r}{0}(\sqrt{-1})^{p\times 0}$ exprime la trace d'une ligne droite quelconque. Par là *on peut écrire algébriquement et calculer à la manière des logarithmes les traces d'un nombre quelconque de lignes avec leurs longueurs et leurs positions.* Je regrette de ne pouvoir m'étendre ici sur cette propriété du signe $\sqrt{-1}$ qui paroît devoir être d'une grande utilité dans la géométrie descriptive.

92. Seconde conséquence. *Pour passer du logarithme* $\pm\frac{n}{m} . T\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *à son exponentielle, il suffit de diviser ce logarithme par* $\sqrt{-1}$. *voyez le No.* 86.

93. Revenons à nos cubes de vrai et de faux marbre.

Ces cubes sont $= -8 \pm 12\sqrt{-6} + 36 - 6\sqrt{6}$. Pour avoir le faux marbre qu'ils contiennent, il faut les exprimer ainsi:

$$8(\sqrt{-1})^2 + 12 . \sqrt{6}(\sqrt{-1})^{\pm 1} + 36(\sqrt{-1})^0 + 6\sqrt{6}(\sqrt{-1})^{-1}$$

qui donne (No. 84.) - - - - - - -

$(2 . 8 \pm 12 . \sqrt{6} + 0 . 36 - 6\sqrt{6})\sqrt{-1}$. Le signe $\sqrt{-1}$ marque ici que les signes + et — ne sont pas des signes d'addition et de soustraction. Par consequent la quantité du faux marbre est $2 . 8 + 12\sqrt{6} + 6\sqrt{6} = 16 + 18\sqrt{6}$.

Pour avoir le vrai marbre que contiennent nos cubes, il faut les exprimer ainsi ; - - - - - - -
$-8+12\sqrt{6}\left[\pm T\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]+36+6\sqrt{6}\left[-T\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$. Or (No. 86.) le signe $T\left(\frac{\pi}{2}\right)$ anéantit toute valeur numérique. Donc la quantité du vrai marbre se réduit à $-8+36=28$, comme le problême l'exige.

94. *Regle générale.* Etant donné une expression telle que $(A\pm B\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$ dont le développement contient des termes affectés du signe $\sqrt{-1}$ et des termes qui n'en sont pas affectés, on connoîtra la somme des termes réellement affectés de ce signe, par la regle suivante : Dévéloppez $(A\pm B\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$ suivant la formule du binome, en observant, 1°. de donner à $\sqrt{-1}$ les exposans indiqués par cette formule, 2°. que $(\sqrt{-1})^{4i}$ ($i$ étant un nombre entier quelconque positif out négatif) fait le même effet que o ; 3°. Qu'il ne faut faire aucune autre réduction que celle de $4i$ à o. Cela fait, tous les termes qui ne seront pas affectés de $(\sqrt{-1})^{4i}$ resteront. Leur somme sera donc celle des quantités réellement affectées du signe $\sqrt{-1}$.

On voit que, dans ce cas, $-1^2$ se trouve être ce qu'on appelle un carré imaginaire.

95. Sur la solution du 5e. problême (No. 70), je remarque 2°. Que l'équation (7.) qui est du 3e. dégré n'est pas dans le cas irreductible. On peut cependant à l'aide des imaginaires, la résoudre comme celles qui sont dans ce cas. C'est ce qu'il faut montrer.

Cette équation développée donne celle ci : - - -
$x^3+3x^2+6x-10=0$ - - - - - (13).
Je fais $x=y-1$, pour anéantir le second terme, ce qui me donne $y^3+3y-14=0$ - - - - - (14).

En imitant le procédé dont on fait usage dans le cas irréductible, si l'on représente par $a\sqrt{-1}$ l'angle dont le sinus est $-14$ et le rayon $2\sqrt{-1}$, on aura pour les trois racines de l'équation (14) $y=\sin.\frac{a\sqrt{-1}}{3}$, $y=\sin.\left\{\left(60^\circ-\frac{a}{3}\right)\right\}\sqrt{-1}$,
et $y=-\sin.\left\{\left(60^\circ+\frac{a}{3}\right)\sqrt{-1}\right\}$, - - - -
ou bien (en multipliant ces sinus par leur rayon $2\sqrt{-1}$, pour les ramener au rayon des tables que je suppose $=1$)
$y=2\sqrt{-1}\times\sin.\frac{a\sqrt{-1}}{3}$, $y=2\sqrt{-1}\times\sin.\left\{\left(60^\circ-\frac{a}{3}\right)\sqrt{-1}\right\}$,
et $y=-2\sqrt{-1}\times\sin.\left\{\left(60^\circ+\frac{a}{3}\right)\sqrt{-1}\right\}$.

On verra dans la question suivante (No. 105.) ce que c'est que ces sinus imaginaires plus grands que leur rayon. En attendant, il faut montrer analytiquement que les trois racines qui viennent d'être posées résolvent l'équation (14).

96. Pour donner à cette recherche toute la généralité possible, supposons que l'équation proposée soit $y^3+py+q=0$ (15), et que cette équation ne soit pas dans le cas irréductible, et même que $p$ soit positif.

Je désigne par $a\sqrt{-1}$ l'angle dont le sinus est $\frac{3q}{p}$ (qui, pour l'équation (14), se réduit à $-14$) et dont le rayon est $2\sqrt{-\frac{p}{3}}$ (qui, pour l'équation (14), se reduit à $2\sqrt{-1}$); et j'ai pour l'équation (15), comme pour l'équation (14),

$$\left\{\begin{array}{l} y=+2\sqrt{-\frac{p}{3}}\times\sin.\frac{a\sqrt{-1}}{3}; \\ y=+2\sqrt{-\frac{p}{3}}\times\sin.\left\{\left(60^\circ-\frac{a}{3}\right)\sqrt{-1}\right\}; \\ y=-2\sqrt{-\frac{p}{3}}\times\sin.\left\{\left(60^\circ+\frac{a}{3}\right)\sqrt{-1}\right\}. \end{array}\right. \quad (16).$$

97. Pour montrer que ces trois racines sont les vraies racines de l'équation (15), il faut les développer.

$$1^\circ.\ y=+2\sqrt{-\frac{p}{3}}\times\sin.\frac{a\sqrt{-1}}{3}=\sqrt{-\frac{p}{3}}\left\{\left(\times\sin.\frac{a\sqrt{-1}}{3}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\cos.\frac{a\sqrt{-1}}{3}\right)+\left(\sin.\frac{a\sqrt{-1}}{3}-\cos.\frac{a\sqrt{-1}}{3}\right)\right\}.$$

Or supposons que le plan sur lequel l'arc $\frac{a}{3}$ est décrit soit perpendiculaire à celui de ce papier. Si le sinus de cet arc est parallèle au plan de ce papier (comme on est maître de le supposer,) son cosinus sera perpendiculaire à ce même plan. Alors $\sqrt{-\frac{p}{3}}\times\sin.\frac{a\sqrt{-1}}{3}$ restera comme il est, parceque les deux signes de perpendicularité que ce terme renferme se détruisent l'un l'autre. $\sqrt{-\frac{p}{3}}\times\cos.\frac{a\sqrt{-1}}{3}$, au contraire, se changera en $\sqrt{-\frac{p}{3}}\times\cos.\frac{a}{3}$. Donc

$$y=+\sqrt{-\frac{p}{3}}\left\{\left(\sin.\frac{a\sqrt{-1}}{3}+\cos.\frac{a\sqrt{-1}}{3}\right)+\left(\sin.\frac{a\sqrt{-1}}{3}-\cos.\frac{a\sqrt{-1}}{3}\right)\right\}\text{ devient}$$
$$y=+\sqrt{-\frac{p}{3}}\left\{\left(\sin.\frac{a\sqrt{-1}}{3}+\cos.\frac{a}{3}\right)+\left(\sin.\frac{a\sqrt{-1}}{3}-\cos.\frac{a}{3}=\right.\right.$$
$$=+\sqrt{-\frac{p}{3}}\left\{\left(\sin.a\sqrt{-1}\ \cos.a\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\sin.\frac{a\sqrt{-1}}{3}-\cos.\frac{a}{3}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}=$$
$$=+\sqrt{-\frac{p}{3}}\left\{\left(\sin.(a\sqrt{-1})+\sqrt{\text{rayon}^2-(\sin.(a\sqrt{-1}))^2}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\sin.(a\sqrt{-1}\right.\right.$$
$$\left.\left.-\sqrt{\text{rayon}^2-(\sin.(a\sqrt{-1}))^2}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}=$$
$$=+\sqrt{-\frac{p}{3}}\left\{\left(\sin.a\sqrt{-1}+\sqrt{1+\sin.^2a}\right)^{\frac{1}{3}}+\left(\sin.a\sqrt{-1}-\sqrt{1+\sin.^2a}\right)^{\frac{1}{3}}\right\}=$$

$$=\left[\sin.(a\sqrt{-1})\times\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}+\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3+\sin.^2a\left(-\frac{p}{3}\right)^3}\right]^{\frac{1}{3}}$$

$$+\left[\sin.(a\sqrt{-1})\times\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}-\sqrt{\left(-\frac{p}{3}\right)^3+\sin.^2a\left(-\frac{p}{3}\right)^3}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

98. Puisque $a\sqrt{-1}$ est l'angle dont le sinus est $\frac{3q}{p}$ et le rayon $2\sqrt{-\frac{p}{3}}$, on a pour le rayon 1, - - -

$$+\sin.a\sqrt{-1}=\frac{+\frac{3q}{p}}{2\sqrt{-\frac{p}{3}}}=\frac{-\frac{q}{2}}{\left(-\frac{p}{3}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

De plus $\sin.(a\sqrt{-1})=(\sin.a)\sqrt{-1}$. Par conséquent $\sin.^2(a\sqrt{-1})=-\sin.^2a$.

Ainsi $\sin.^2a=-\sin.^2(a\sqrt{-1})=-\frac{\left(-\frac{q}{2}\right)^2}{\left(-\frac{p}{3}\right)^3}=\frac{\left(\frac{q}{2}\right)^2}{\left(\frac{p}{3}\right)^3}$. La valeur précedente de $y$ devient donc - - - -

$$y=\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3-\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

99. Mais cette valeur de $y$ tire son origine d'un arc perpendiculaire au plan de ce papier, aussi bien que son cosinus qui est $\sqrt{-\left(\frac{p}{3}\right)^3-\left(\frac{q}{2}\right)^2}$ ou $\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}\times\sqrt{-1}$. Si l'on remet cet arc sur le plan de ce papier, son cosinus s'y trouvera et son sinus y restera. Le sinus conservera donc son signe, mais le cosinus perdra le sien qui est $\sqrt{-1}$. On aura donc en dernière analyse - - - - - - -

$$y=\left[-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}\right]^{\frac{1}{3}}(17).$$

C'est la formule connue sous le nom de formule de CARDAN.

100. 2°. $y=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\times\sin.\left\{\left(60°-\frac{a}{3}\right)\sqrt{-1}\right\}=$ -

$$=\sqrt{-\frac{p}{3}}\Big[\sin.\Big\{\Big(60^\circ-\frac{a}{3}\Big)\sqrt{-1}\Big\}+\cos.\Big(60^\circ-\frac{a}{3}\Big)+$$

$$+\sin.\Big\{\Big(60^\circ-\frac{a}{3}\Big)\sqrt{-1}\Big\}-\cos.\Big(60^\circ-\frac{a}{3}\Big)\Big]=$$

$$=\sqrt{-\frac{p}{3}}\Big[\Big\{\sin.\Big(60^\circ-\frac{a}{3}\Big)\Big\}\sqrt{-1}+\cos.\Big(60^\circ-\frac{a}{3}\Big)+$$

$$+\Big\{\sin.\Big(60^\circ-\frac{a}{3}\Big)\Big\}\sqrt{-1}-\cos.\Big(60^\circ-\frac{a}{3}\Big)\Big]=$$

$$=\sqrt{-\frac{p}{3}}\Big[(\cos.60^\circ+\sin.60^\circ\sqrt{-1})\Big(\cos.\frac{a}{3}-\sin.\frac{a}{3}\sqrt{-1}\Big)$$

$$-(\cos.60^\circ-\sin.60^\circ\sqrt{-1})\Big(\cos.\frac{a}{3}+\sin.\frac{a}{3}\sqrt{-1}\Big)\Big]=$$

$$=\sqrt{-\frac{p}{3}}\Big[(\cos.60^\circ+\sin.60^\circ\sqrt{-1})(\cos.a-\sin.a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}-$$

$$-(\cos.60^\circ-\sin.60^\circ\sqrt{-1})(\cos.a+\sin.a\sqrt{-1})^{\frac{1}{3}}\Big]=$$

$$=(\cos.60^\circ+\sin.60^\circ\sqrt{-1})\times-\sqrt{-\frac{p}{3}}(\sin.a\sqrt{-1}-\cos.a)^{\frac{1}{3}}$$

$$+(\cos.60^\circ-\sin.60^\circ\sqrt{-1})\times-\sqrt{-\frac{p}{3}}(\sin.a\sqrt{-1}+\cos.a)^{\frac{1}{3}}.$$

Or $\cos.60^\circ=\frac{1}{2}$; $\sin.60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}$; - - -

$$-\sqrt{-\frac{p}{3}}(\sin.a\sqrt{-1}\mp\cos.a)^{\frac{1}{3}}=(\text{Nos. } 97, 98, 99)\Big[+\frac{q}{2}\pm$$

$$\pm\sqrt{\Big(\frac{p}{3}\Big)^3+\Big(\frac{q}{2}\Big)^2}\Big]^{\frac{1}{3}}.\quad \text{Donc } y=\Big(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\Big)\Big(\frac{q}{2}+\quad - \quad -$$

$$+\sqrt{\Big(\frac{p}{3}\Big)^3+\Big(\frac{q}{2}\Big)^2}\Big)^{\frac{1}{3}}+\Big(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\Big)\Big(\frac{q}{2}-\sqrt{\Big(\frac{p}{3}\Big)^3+\Big(\frac{q}{2}\Big)^2}\Big]^{\frac{1}{3}}\ (18).$$

C'est la formule générale pour la seconde racine de l'équation (15).

101. 3°. Il est facile maintenant de voir de la 3e. racine de cette équation, laquelle racine est - - -

$$y=2\sqrt{-\frac{p}{3}}\times\sin.\Big\{\Big(60^\circ+\frac{a}{3}\Big)\sqrt{-1}\Big\},\ \text{devient}\quad - \quad -$$

$$y=\Big(\frac{1-\sqrt{-3}}{2}\Big)\Big(\frac{q}{2}+\sqrt{\Big(\frac{p}{3}\Big)^3+\Big(\frac{q}{2}\Big)^2}\Big)^{\frac{1}{3}}+\Big(\frac{1+\sqrt{-3}}{2}\Big)\Big(\frac{q}{2}-\quad -$$

$-\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}\Big)^{\frac{1}{3}}$ (19). C'est la formule générale pour la 3e. racine de l'équation (15).

102. On voit donc par ce détail que les formules (17), (18) et (19) qui sont les formules générales pour la résolution des équations du 3e. dégré, sont les mêmes que les formules (16). Mais celles-ci ne diffèrent des formules pour la résolution de ces mêmes équations, dans le cas irréductible, qu'en ce que l'arc et le rayon portent le signe $\sqrt{-1}$, c'est-à-dire, qu'ils sont dans un plan perpendiculaire à celui où ils seroient dans ce cas. J'ai donc prouvé ce que j'avois intention de prouver, savoir, qu'on peut résoudre les équations du 3e. dégré, dans tous les cas, de la même manière qu'on le fait dans le cas irréductible, c'est-à-dire, *par un sinus.*

103. Il ne me reste plus qu'un point à discuter sur cette matière; c'est de savoir ce que signifient des sinus ou des cosinus imaginaires plus grands que leurs rayons. C'est ce que je vais faire dans la question qui suit.

## *Problême* VI.

104. Que deviennent les courbes du 2d. dégré, c'est-à-dire, les sections coniques, lorsque leurs ordonnées deviennent imaginaires?

Commençons par le cercle. Son équation est, en mettant au centre l'origine des coordonnées, $yy = aa - xx$. Lorsque $x > a$, on a $yy = -(xx - aa)$, et $y = \pm\sqrt{xx - aa}\,.\,\sqrt{-1}$, ou bien $y\sqrt{-1} = \mp\sqrt{xx - aa}$. Si l'équation $y = \pm\sqrt{aa - xx}$ exprime l'ordonnée d'un cercle décrit sur le plan de ce papier, avec un rayon $= a$, l'équation $y\sqrt{-1} = \mp\sqrt{xx - aa}$

exprime l'ordonnée d'une hperbole équilatère décrite sur un plan perpendiculaire à celui de ce papier, et ayant $a$ pour la valeur de chacun de ses deux demi-axes.

105. Soit ADBE (Fig. 12) le cercle dont l'ordonnée est $y = \pm\sqrt{aa - xx}$, et $\text{AC} = a$, le rayon. A$mn$B$pq$ est l'hyperbole équilatère dont l'ordonnée est $y = \pm\sqrt{xx - aa} \cdot \sqrt{-1}$, ou $y\sqrt{-1} = \mp\sqrt{xx - aa}$. Cette hyperbole est supposée décrite sur un plan perpendiculaire à celui du cercle. $\overline{\text{AC}}$, $\overline{\text{CD}}$, sont égaux à ses deux demi-axes. $\overline{a'\text{C}d'}$ et $\overline{b'\text{C}c'}$ sont ses assymptotes. Ces assymptotes font avec l'axe $\overline{\text{AB}}$ le même angle que les lignes $\overline{a\text{C}d}$, $\overline{b\text{C}c}$, font avec ce même axe, c'est-à-dire, un angle de 45°.

Or $x$ et $y$ coordonnées du cercle sont le sinus et le cosinus de l'arc qui leur correspond. Donc $x$ et $y$ coordonnées de l'hyperbole équilatère décrite sur un plan perpendiculaire à celui du cercle sont ce que deviennent le sinus et le cosinus, lorsque le sinus devient lui-même plus grand que le rayon.

106. Hyperbole équilatère.

Faisons tourner, par la pensée, la Figure 12 de manière que l'hyperbole A$mn$B$pq$ se trouve sur le plan de ce papier. Ce mouvement rendra le cercle ADBE perpendiculaire à ce même plan. Par là, l'ordonnée $y\sqrt{-1} = \mp\sqrt{xx - aa}$ de cette hyperbole cessant d'y être perpendiculaire, perd son signe $\sqrt{-1}$, et l'on a $y = \mp\sqrt{xx - aa}$, ou $yy = xx - aa$. Lorsque $x < a$, on a $yy = -(aa - xx)$, qui donne $y\sqrt{-1} = \pm\sqrt{aa - xx}$, équation à un cercle perpendiculaire au plan de ce papier.

L'équation $yy = -aa + xx$ donne $(a\sqrt{-1})^2 - (x\sqrt{-1})^2$,

qui diffère de l'équation (7) $y^2=\left(\frac{a}{2}\sqrt{-1}\right)^2-z^2$ (No. 43, Probl. II.) en ce que, dans cette dernière équation, l'abscisse $z$ est réelle, au lieu que, dans l'équation $y^2=(a\sqrt{-1})^2-(x\sqrt{-1})^2$, l'abscisse $x\sqrt{-1}$ est imaginaire. Cela vient de ce que l'équation du No. 43 est celle d'un cercle décrit d'un mouvement conique, par une ligne brisée, au lieu que l'équation du présent numéro est celle d'un cercle décrit sur un plan perpendiculaire à celui de ce papier.

Ce numéro-ci et les deux précédens montrent que le cercle devient une hyperbole équilatère perpendiculaire, et l'hyperbole équilatère, un cercle perpendiculaire, lorsque leurs ordonnées deviennent imaginaires.

107. Ellipse et hyperbole non-équilatère.

Supposons que toute la Figure 12 tourne également autour de l'axe $\overline{AB}$, sans que ce papier tourne en même temps. Alors, au lieu d'un cercle et d'une hyperbole équilatère, on aura, d'abord par la projection du cercle sur ce papier, une ellipse, ensuite par la projection de l'hyperbole équilatère sur un plan perpendiculaire à ce papier, une hyperbole dont le grand axe sera $=\overline{AB}$, et dont le petit axe sera $<\overline{DE}$.

Les diamètres $\overline{ad}$, $\overline{bc}$, deviendront des diamètres conjugués égaux l'un à l'autre. Leur angle restera égal à l'angle assymptotique, quoiqu'alors $< 90°$.

108. L'équation de cette ellipse rapportée à ses *diamètres conjugués égaux* sera la même que celle du cercle, savoir, $yy=aa-xx$; mais ses coordonnées feront entr'elles un angle égal à celui des diamètres conjugués.

Il en sera de même des coordonnées de l'hyperbole rapportée à ses assymptotes.

On peut donc raisonner sur cette ellipse et cette hyperbole, comme nous l'avons fait sur le cercle et l'hyperbole équilatère. On y trouvera les mêmes analogies.

109. Parabole.

Son équation est $yy = px$. Si $x$ est négatif, on a $-yy = px$, qui donne $y\sqrt{-1} = \pm px$. Cette seconde équation représente une seconde parabole qui est perpendiculaire au plan de ce papier et qui s'étend dans la partie négative de l'axe de la première parabole supposée décrite sur le plan de ce papier. Les sommets des deux paraboles se touchent, et les directions de leurs axes sont opposées.

110. Prenons maintenant une vue générale de toutes ces sections coniques à ordonnées imaginaires, que j'appellerai *appendices* des sections coniques.

1°. L'hyperbole équilatère est l'appendice du cercle. L'hyperbole non-équilatère est celui de l'ellipse, et la parabole celui de la parabole. Or comme les courbes-appendices sont perpendiculaires à leurs courbes originales, celles-ci le sont à celles-là. Donc le cercle est l'appendice de l'hyperbole équilatère, &c.

111. 2°. L'axe commun à la courbe originale et à la courbe-appendice est la projection de chacune de ces deux courbes sur le plan de son appendice.

112. 3°. Comme toutes ces courbes ont deux axes, savoir, celui des abscisses et celui des ordonnées, il faut dire relativement au second axe tout ce qui vient d'être dit relativement au premier.

113. 4°. Comme les courbes appendices ont les mêmes axes que leurs courbes originales, ces axes ont dans toute leur étendue, c'est-à-dire depuis $-\infty$ jusqu'a $+\infty$, des

ordonnées qui leur correspondent. Or il est facile de voir que ce que j'ai dit des sections coniques peut se dire également de toute autre courbe, soit algébrique, soit transcendante. Donc, supposant l'axe décrit sur le plan de ce papier et appellant *ordonnées* deux espèces de perpendiculaires à cet axe, savoir, celles qui sont sur ce papier et celles qui y sont perpendiculaires, je suis autorisé à établir cette proposition générale: *Une courbe quelconque a dans toute l'étendue de* CHACUN DE SES AXES, *c'est-à-dire, depuis* $-\infty$ *jusqu'à* $+\infty$, *autant d'ordonnées que le dégré de son équation contient d'unités, et comme le dégré d'une courbe transcendante est infini, le nombre de ces ordonnées dans tout le cours de chaque axe est infini.*

P.S. Depuis la composition de ce Mémoire, j'ai lû, dans le 1er. Tome des Mémoires de la Societé de Turin, un Mémoire de Mr. DE FONCENEX intitulé: *Réflexions sur les Quantités imaginaires*, où se trouve l'article suivant:

"No. 6. Si l'on réfléchit sur la nature des racines imaginaires qui, comme on sait, impliquent contradiction entre les données, on concevra évidemment qu'elles ne doivent point avoir de construction géométrique possible, puisqu'il n'est point de manière de les considérer qui lève la contradiction qui se trouve entre les données immuables par elles-même.

"Cependant, pour conserver une certaine analogie avec les quantités négatives, un auteur dont nous avons un cours d'algèbre d'ailleurs fort estimable a prétendu les devoir prendre sur une ligne perpendiculaire à celle où l'on les avoit supposées. Si, par exemple, on devoit couper la ligne

" CB (Fig. 1) $= 2a$ de façon que le rectangle des parties " $x \times (2a - x)$ fût égal à la quantité $2a^2$, on trouveroit " $x = a \pm \sqrt{-a^2}$. Pour trouver donc cette valeur de $x$, " qu'on prenne sur la ligne CB, la partie AB $= a$, partie " réelle de la valeur de $x$, et sur la perpendiculaire DD′, les " parties AD, AD′, aussi $= a$, on aura les points D, D′, qui " resolvent le problême en ce que BD × DC, ou BD′ × DC′ $= 2a^2$; " mais puisque les points D, D′, sont pris hors de la ligne CB, " et qu'une infinité d'autres points pris de même, auroient " aussi une proprieté semblable, il est visible que, si cette " construction ne nous induit pas en erreur, elle ne nous fait " absolument rien connoître. C'est cependant là un des cas " où elle pourroit paroître plus spécieuse; car le plus souvent " on ne voit absolument pas comment le point trouvé pourroit " résoudre la question, quelque changemens qu'on se permît " dans l'énoncé du problême.

" Les racines imaginaires n'admettent donc pas une con- " struction géométrique, et on ne peut en tirer aucun avan- " tage dans la résolution des problêmes. On devroit par " conséquent s'attacher à les écarter autant qu'il est possible " des équations finales, puisque prises dans quelque sens que " ce soit, elles ne peuvent pas résoudre la question, comme " les racines négatives dont toute la contradiction consiste " dans leur manière d'être à l'égard des positives."

Voici les reflexions que cet article m'a suggérées.

1°. La question exposée par Mr. DE FONCENEX est à peu près la même que celle proposée par Mr. CARNOT et qui est le 2d problême du présent écrit. Je ne connoissois pas les objections de Mr. DE FONCENEX; mais quand je les aurois

connues, j'aurois dit exactement tout ce que j'ai dit, et rien de plus.*

2°. Ecarter les quantités imaginaires des équations finales, comme Mr. DE FONCENEX le désire, est une chose impossible, passé le second dégré, à moins qu'on n'employe les sinus ou les cosinus, et je prouverai ailleurs que l'expression *finie* des sinus et des cosinus renferme, non seulement de fait, mais *nécessairement*, le signe $\sqrt{-1}$.†

On a vu aux Nos. 95 et suiv. comment la supposition d'un rayon portant le signe $\sqrt{-1}$ m'a conduit aux formules connues pour les équations du 3e. dégré, dont la première ne renferme plus ce signe. Si ce rayon ne portoit pas le signe $\sqrt{-1}$, alors ce signe reparoîtroit *nécessairement* dans cette première formule qui alors représenteroit le cas appellé *irréductible.*

3°. Dans les problêmes que je me suis proposé, je crois avoir fait voir que les racines imaginaires en donnoient des solutions qui n'étoient pas absurdes. On a même vû un problême du 3e. dégré, et par conséquent possible, qui ne pouvoit être résolu par la racine réelle, et qui l'étoit sans absurdité par les deux racines imaginaires.

4°. On a vu un problême (c'est le 3e.) qui paroissoit ab-

* Je n'ai pas cru devoir parler d'un Mémoire de Mr. KHUN qui se trouve dans le 3e. tome des nouveaux Mémoires de Petersbourg, où ce Professeur entreprend de construire les quantités imaginaires, parcequ'il y suppose tacitemet $\sqrt{-1} = -\sqrt{1}$.

† Mr. WOODHOUSE, dans un exellent Mémoire sur les quantités imaginaires inséré dans les *Transactions Philosophiques* de 1801, veut qu'on substitue aux signes *géométriques sin. cos.* &c. les expressions finies imaginaires dont je parle ici, et il regarde ces expressions qui renferment le signe $\sqrt{-1}$ comme représentatives de séries infinies *arithmétiques.* Tout cela est parfaitement conséquent au principe, que *l'algébre n'est qu'une arithmétique universelle.*

surde et dont la solution (par des racines imaginaires) avoit un sens qui ne l'étoit pas. Ce problême n'étoit absurde qu'en apparence. C'étoit une énigme. Les racines imaginaires interprétées selon les principes de ce mémoire en ont donné le mot. Résoudre ainsi un problême, ce n'est pas en changer l'énoncé, c'est l'expliquer; ce n'est pas seulement répondre à une question proposée, c'est encore dire comment elle devoit l'être. Enfin, quelque sens qu'on ait en vue, en proposant une question qui mène à des racines imaginaires, ces racines y satisfont. Si c'est un sens raisonnable, elles le donnent et l'expliquent. Si c'est un sens absurde (ce qui n'arrive que quand on prend ces racines arithmétiquement) elles en montrent l' absurdité, mais elles ne l'expliquent pas; car ce qui est absurde est inexplicable.

5°. J'ai dit que, pour résoudre algébriquement une question, trois choses étoient nécessaires; 1°. traduire la question en langage algébrique; 2°. traduire l'énoncé algébrique de la question en sa solution algébrique; 3°. traduire cette solution algébrique en une solution éxécutive.

Rien ne fait plus d'honneur à l'esprit humain que la sagacité et l'addresse qu'on a mises dans la seconde espèce de ces traductions.

La méthode des variations de Mr. La Grange et l'usage qu'il en fait dans sa *mécanique analytique* offrent des modèles admirables de la première espèce; mais il y manque un point essentiel qu'il étoit impossible à l'algèbre-arithmétique d'obtenir. Je m'explique. Les questions de mécanique roulent sur des quantités concrètes. La manière même dont ces quantités sont concrètes fait partie de ces questions. Ainsi traduire ces quantités concrètes en quantités abstraites, c'est

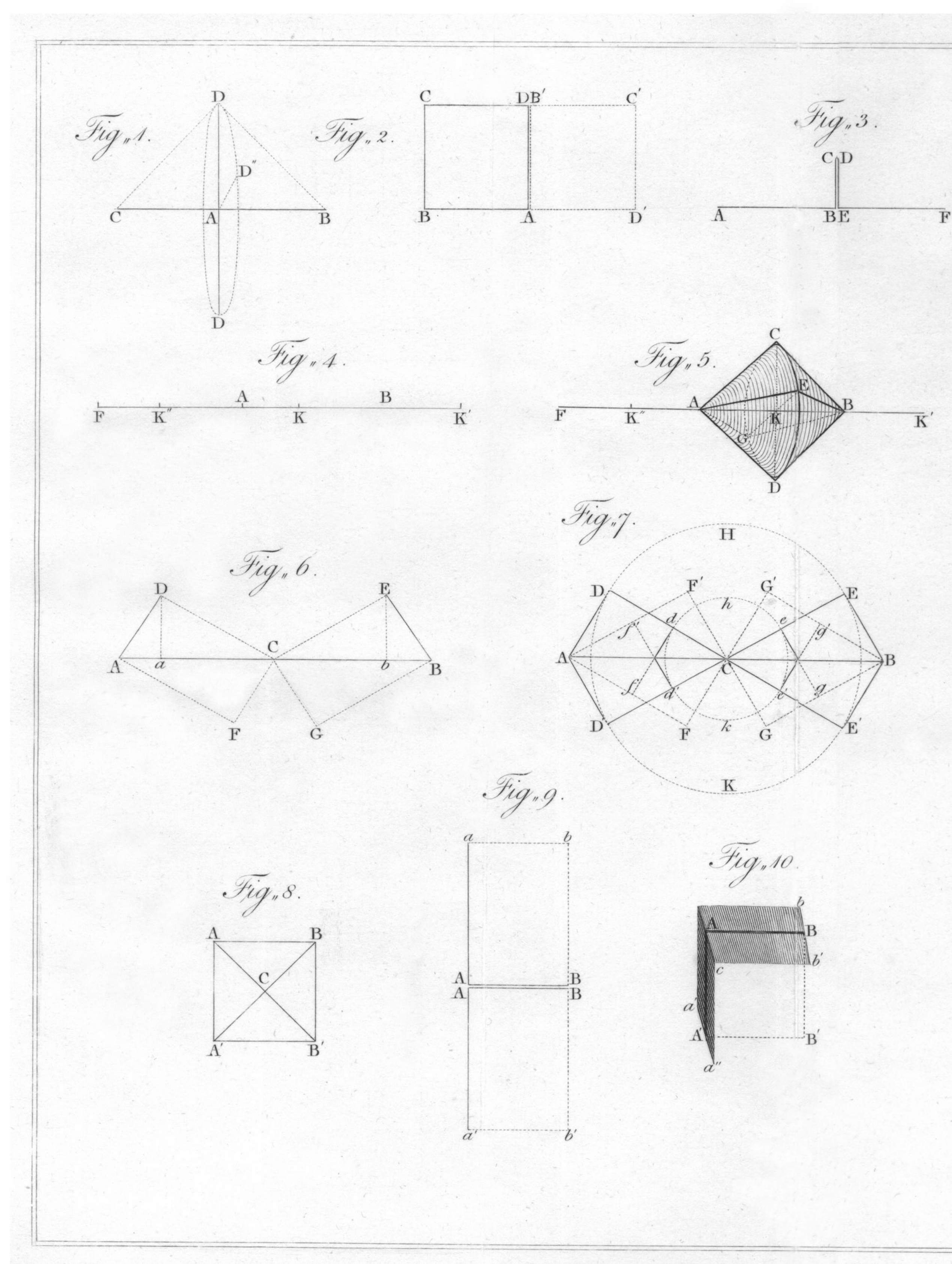
les traduire imparfaitement. Delà l'impossibilité presque continuelle de parvenir, à l'aide de ces traductions, aux solutions demandées.* Dans les cas même où l'on a réussi, ce n'a été qu'avec une difficulté extrême. Quelle profondeur, quelle addresse, quelle sagacité n'a t'il pas fallu à Mr. LA PLACE pour poser, avec le seul secours des équations différentielles connues (expliquées à la manière ordinaire) la dernière pierre à l'édifice NEWTONIEN! Avec les seuls signes + et —, on ne peut traiter que la géométrie *mensurative;* cependant les problêmes de mécanique n'appartiennent pas plus à cette géométrie qu'à la géométrie *descriptive.*

A l'égard de la 3e. espèce de traduction qui n'est pas la moins importante, on s'en est beaucoup moins occupé que des deux autres. Aussi je puis citer un problême célébre en mécanique (celui des *cordes vibrantes*) dont la solution, quoiqu'elle fasse le plus grand honneur aux géomètres célébres qui l'ont donnée, n'est certainement pas complette. En effet, ils ont résolu l'équation aux différences partielles $\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = \left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$, et leur solution donne la courbe indéterminée qui peut être formée par la longueur de la corde; mais ils ne résolvent pas l'équation $-\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = -\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ qui est la véritable équation du problême et qui donneroit la courbe décrite par un point quelconque de cette corde, dans un plan perpendiculaire à son axe. L'équation $-\left(\frac{ddy}{dx^2}\right) = -\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ est la même (arithmé-

* On a regardé comme un trait de génie dans Mr. LA GRANGE d'être parvenu à traiter de la mécanique la plus sublime, sans figures. C'en a été un plus grand d'avoir vu qu'il n'en falloit pas. En effet, traiter la mécanique algébriquement, c'étoit (dans le systême d'algèbre généralement adopté) ne la traiter qu'arithmétiquement. Or l'arithmétique n'a pas besoin des figures de la géométrie.

tiquement que l'équation $+\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)=+\left(\frac{ddy}{dt^2}\right)$ ; mais elle n'est pas la même relativement à la géométrie descriptive. L'intégrale de la première est très différente de l'intégrale de la seconde. Elle est beaucoup plus bornée, (N°. 24,) à cause du signe — qui oblige de lui donner la forme - - - $\left\{\frac{ddy}{(dx\sqrt{-1})(dx\sqrt{-1})}\right\}=\left\{\frac{ddy}{(dt\sqrt{-1})(dt\sqrt{-1})}\right\}$. La solution qu'on tire de cette dernière équation est à peu près semblable à celle que Newton a donnée d'un problême analogue, dans la 47e. proposition du second livre de ses Principes, et qui a paru peu satisfaisante aux géométres qui sont venus depuis ce grand homme. Oserois-je ajouter qu'ils n'en ont pas saisi le vrai sens ?

L'explication que j'ai donnée du signe $\sqrt{-1}$ me paroît devoir applanir bien des difficultés.


Fig. 1.
D
D''
C
A
B
D
Fig. 2.
C
DB'
C'
B
A
D'
Fig. 3.
C D
A
BE
F
Fig. 4.
A
B
F
K''
K
K'
Fig. 5.
C
E
A
B
F
K''
K
K'
G
D
Fig. 6.
D
E
C
A
a
b
B
F
G
Fig. 7.
H
D
F'
G'
E
h
d
e
f'
g'
A
C
B
f
d'
e'
g
D'
F
k
G
E'
K
Fig. 9.
a
b
A
B
A
B
a'
b'
Fig. 8.
A
B
C
A'
B'
Fig. 10
b
A
B
b'
c
a'
A'
B'
a''

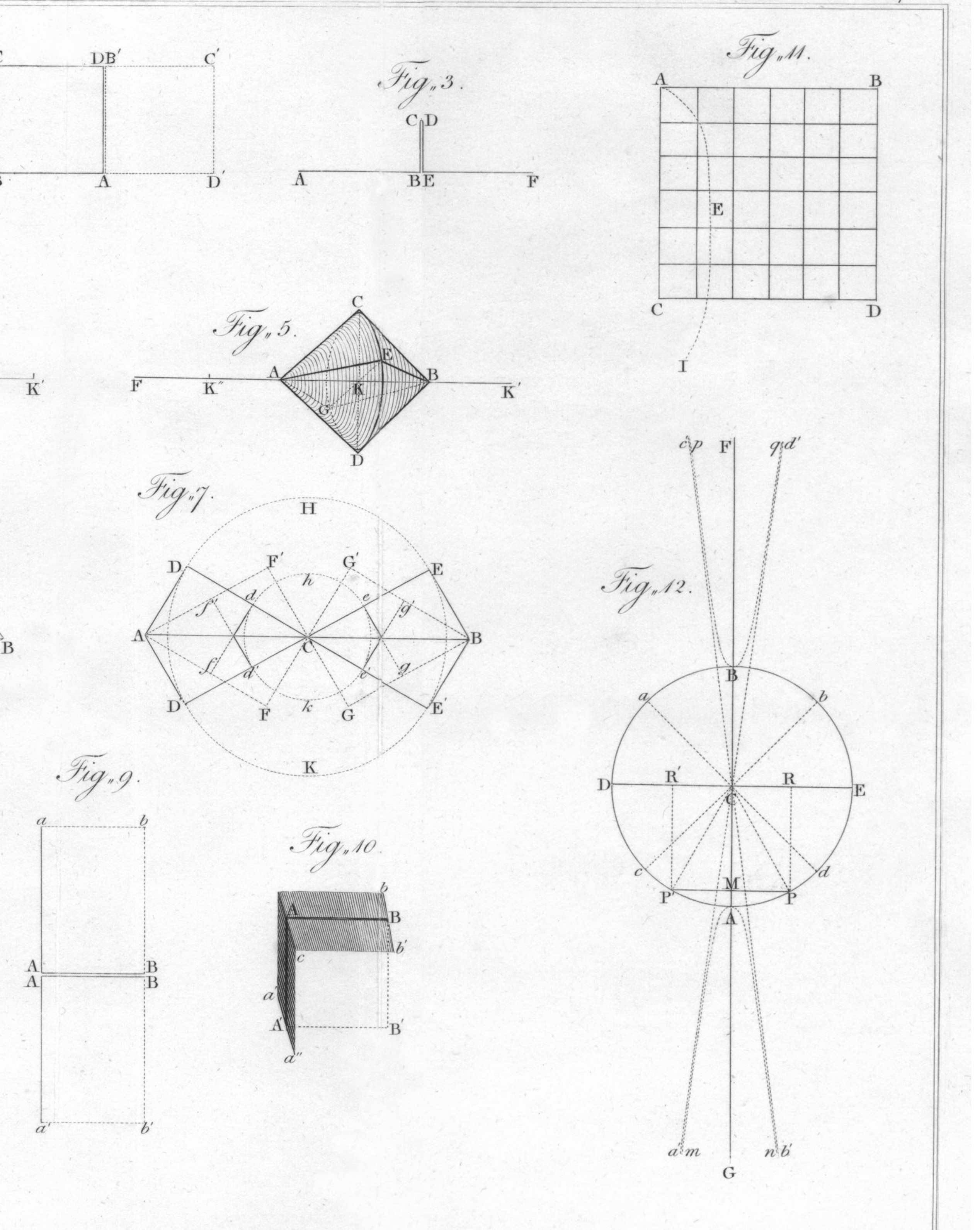


Fig. 3.
C D
A
BE
F
DB′
C′
A
D′
Fig. 5.
C
E
A
B
F
K″
K
K′
G
D
Fig. 7.
H
D
F′
G′
E
h
d
e
f′
g′
A
C
B
f
d′
e′
g
D′
F
k
G
E′
K
Fig. 9.
a
b
A
B
A
B
a′
b′
Fig. 10
b
A
B
b′
c
a′
A′
B′
a″
Fig. 11.
A
B
E
C
D
I
Fig. 12.
c p
F
q d′
B
a
b
D
R′
R
E
C
c
d
M
P′
P
A
a′ m
n b′
G